



ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОСНОВАН В 1878 ГОДУ



**НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
ММФ ТГУ, ПОСВЯЩЕННАЯ
50-ЛЕТИЮ ПОЛЕТА В КОСМОС
Ю.А. ГАГАРИНА**

Томск - 2011

**Томский государственный университет
Механико-математический факультет**

**Научная конференция студентов
и молодых ученых
механико-математического факультета
Томского государственного университета,
посвященная 50-летию полета в космос
Ю.А. Гагарина**

Сборник трудов конференции

12 – 19 апреля 2011 года

Томск – 2011

Редакционная коллегия
доцент В.Н. Берцун
доцент Н.Н. Богословский

**Научная конференция студентов и молодых ученых
механико-математического факультета Томского
государственного университета, посвященная 50-летию
полета в космос Ю.А. Гагарина: Сборник трудов
конференции (Томск, 12 – 19 апреля 2011 г.) – Томск:
Томский государственный университет, 2011 г. - 150 с.**

В сборник включены лучшие доклады конференции.

**Печатается по решению оргкомитета Научная
конференция студентов и молодых ученых
механико-математического факультета Томского
государственного университета, посвященная 50-летию
полета в космос Ю.А. Гагарина**

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»	6
Кевролева К.В. Алгоритм целочисленной факторизации на эллиптических кривых	6
СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»	10
Камчатный С.А., Щербаков Н.Р. Математическая модель процесса сближения двух поверхностей в пространстве	10
Самылкина О.А., Бухтик М.С. Экстремумы локальных деформаций при отображении поверхности на поверхность	15
Тарновская Е. П., Корякина Е.Е. Хроматическое число. Трехмерный случай	18
Митина Т.А., Бухтик М.С. Гиперповерхность в E_4 . Визуализация кривизны нормального сечения	22
Диль Д.О. Определение точки контакта при моделировании передаточного механизма с циклоидально-эксцентриковым зацеплением	26
СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»	30
Гусев С.И., Шерemet М.А. Сравнительный анализ различных подходов к построению численного решения плоской задачи теплопроводности	30
СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»	35
Чуриков В.А. Некоторые свойства гиперболических функций дробного анализа целочисленных порядков	35
Колесников И. А. Уравнение для отображения с симметрией переноса на круговой счетноугольник	40
Пчелинцев В.А., Александров И.А. Об области значений функционала в задаче о неналегающих областях	45
Шишкова А.А., Касаткина Т.В. Об одном совершенном семействе множеств	49
СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»	51
Абеляшев Д.Г., Дорошук Е.В., Михайлов М.Д. Применение параллельного алгоритма к численной реализации модели самоочистения водной среды в одномерной постановке	51
Бузаев С.С., Родимова О.Б. Методы численного интегрирования и их применение к расчету функции пропускания	58

Громова В.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование процессов самоочищения реки Томи с учетом характеристик течения	63
Гронская А.А., Лаева В.И. Модифицированный попеременно-треугольный метод решения третьей красной задачи для уравнения эллиптического типа	68
Кошкина А.А. Численное решение систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов	71
Косова О.Н., Каминская Е.В. Построение эрмитового кубического сплайна на основе базисных функций	76
Пауль Ю. А., Меркулова Н. Н. Изучение математических моделей вирусного заболевания.....	80
Тажыйма С.У., Лаева В.И. Разностная схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа	85
Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Герасимов Д.Ю., Васильева О.В. Моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя (КМПУ) на основе электротехнической схемы замещения	90
Конonenко А. А., Меркулова Н. Н. Исследование сходимости интерполяционного процесса на адаптивных сетках	95
Новосельцева О.В., Богословский Н.Н. Применение метода сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией в задачах безусловной оптимизации	100
СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»	106
Фролова А.В., Устинова И.Г. Выделение тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений	106
Карпова Т.В., Кривякова Э.Н. Оптимальная интерполяция поля вывала в районе Тунгусского явления.....	109
Лунышина И.В., Кривякова Э.Н. Системы одновременных уравнений	110
Смирнов А.Е., Пергаменщиков С.М. Задача оптимального потребления и инвестирования для модели Блэка-Шоулса	113
СЕКЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»	118
Паньковская Е.А., Гензе Л.В. Метризуемые подпространства в свободных абелевых топологических n -периодических группах ..	118
Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е. Пространства непрерывных функций на стрелке Зоргенфрея	120
СЕКЦИЯ «ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»	123

Белоусова А.О., Голованов А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование тепловых смерчей	123
Караваев В.В., Лобода Е.Л. Исследование возникновения и распространения степного пожара от точечного и линейного источников в натуральных условиях	127
Касымов Д.П., Гришин А.М., Зима В.П. Экспериментальные и теоретические исследования зажигания торфа от низового лесного пожара	132
Краснов А.А., Голованов А.Н. Теплообмен стенки и высокотемпературного газа при наличии вдува жидкости через пористые материалы	136
Репало Е.Н. Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке	140
Вильмс В.С., Лобода Е.Л. Математическое моделирование возникновения и распространения степных пожаров в двумерной постановке	145

СЕКЦИЯ «АЛГЕБРА»

Алгоритм целочисленной факторизации на эллиптических кривых

Кевролева К.В.

Томский государственный университет
E-mail: kevroleva@mail2000.ru

В большинстве современных программах и стандартах криптографии применяются методы с открытым ключом, основанные на проблеме факторизации больших чисел. Однако для их надежной защищенности число битов ключа в последние годы резко возросло, что обусловило рост нагрузки на вычислительные системы. Подход на основе эллиптических кривых, которые являются источником конечных абелевых групп, обеспечивает эквивалентную защиту, в сравнении с ранее разработанными протоколами, при меньшем числе разрядов.

Эллиптические кривые исследовались на протяжении более сотни лет, но интерес к ним проявляли исключительно узкие специалисты в области теории чисел. Так было примерно до 1985 года, пока независимо Нилом Коблицем и Виктором Миллером не было предложено использовать в криптографии алгебраические свойства так называемых эллиптических кривых. С этого момента началось бурное развитие нового направления в криптографии, для которого используется термин криптография на эллиптических кривых, соответствующий принятому в англоязычной литературе *Elliptic Curve Cryptography (ECC)*. В криптографии на эллиптических кривых роль основной криптографической операции выполняет операция скалярного умножения точки эллиптической кривой на данное целое число, определяемая через операции сложения и удвоения точек эллиптической кривой.

В конце 80-х г. XX столетия были разработаны самые быстрые на сегодняшний день алгоритмы факторизации, одним из которых является метод эллиптических кривых (*the Elliptic Curves method*), предложенный голландским математиком Хендриком Ленстрой в 1987 году. Сложность этого метода определяется величиной не

самого составного числа, требующего факторизации, а величиной его наименьшего делителя.

Целью настоящей работы является описание применения эллиптических кривых в вопросах факторизации, на примере алгоритма Ленстры.

Алгоритм факторизации с помощью эллиптических кривых Ленстры основан на идее классического метода факторизации – $(p-1)$ -алгоритме Полларда, разработанного английским математиком Джоном Поллардом в 1947 году и опубликованном в [1].

Пусть дано составное целое нечетное число n . Необходимо найти его нетривиальный делитель $d|n$. Идея метода целочисленной факторизации на эллиптических кривых Ленстры заключается в следующем. Произвольным образом выбирается эллиптическая кривая $E: y^2 = x^3 + ax + b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, будем рассматривать эллиптические кривые, которые описываются усеченной формой Вейерштрасса [2], [3], и точка $P = (x_1, y_1)$ на ней. С помощью E и P будем разлагать n способом, описанным ниже; если попытка окажется неудачной, то выбирается другая пара (E, P) . Это продолжается до тех пор, пока не найдется делитель $d|n$.

До начала работы с кривой E по модулю n необходимо проверить, что это действительно эллиптическая кривая по модулю любого $p|n$, т. е. что кубический многочлен в правой части уравнения не имеет кратных корней по модулю p . Это справедливо тогда и только тогда, когда дискриминант взаимно прост с n . Таким образом, если $\text{НОД}(4a^3 + 27b^2, n) = 1$, то можно продолжать алгоритм. Заметим, что если НОД не равен 1 или n , то получен искомым делитель числа n . А если же НОД равен n , то необходимо выбрать другую эллиптическую кривую E и начать все с начала.

Таким образом, имея пару (E, P) , выбираем целое число k , которое делится на степени малых простых чисел, то есть не больших некоторого B , не превосходящие C . Полагаем $k = \prod_{l \leq B} l^{\alpha_l}$,

где a_i есть такой наибольший возможный показатель, что $l^a \leq C$.
Далее вычисляется kP , умножение выполняется с помощью алгоритма сложения или удвоения точек эллиптической кривой [4], при этом все действия выполняются по модулю числа n . Результаты этих вычислений не представляют интереса до тех пор, пока при попытке найти число, обратное к знаменателю в формулах сложения или удвоения точек эллиптической кривой, не получим число, которое не взаимно просто с n . А это произойдет, когда появится такая точка k_1P (частичная сумма в процессе вычисления kP), что $k_1(P(\bmod p)) = O(\bmod p)$ для некоторого простого делителя $p|n$, иными словами, порядок $P(\bmod p)$ в группе $E(\bmod p)$ является делителем k_1 . Когда, применяя алгоритм Евклида [5], пытаемся обратить знаменатель, делящийся на p , вместо этого находим НОД числа n и этого знаменателя. Этот НОД и будет искомым собственным делителем n , если он отличен от n , т. е. если знаменатель не делится на само n .

Рассмотрим сам алгоритм.

Вход: n – составное натуральное число.

Выход: нетривиальный делитель d числа n .

1. Выбираем целые числа a, x_1, y_1 , находящиеся в интервале $(1, n)$.
2. Полагаем $b = (y_1^2 - x_1^3 - ax_1) \bmod n$ и рассматриваем кривую $E: y^2 = x^2 + ax + b$, $a, b \in Z$, а также точку $P = (x_1, y_1)$ на E .
3. Вычисляем $\text{НОД}(4a^3 + 27b^2, n) = 1$.
4.
 - 4.1 Если $d = n$, тогда возвращаемся к шагу 1 и выбираем другое число a ;
 - 4.2 Если $1 < d < n$, тогда d есть нетривиальный делитель числа n и возврат (d);
 - 4.3 Если $d = 1$, тогда переходим к следующему шагу.
5. Выбираем число k , являющееся произведением небольших простых чисел в небольших степенях.
6. Вычисляем точку kP .

7. Вычисляем D как НОД числа n и знаменателя $x_k - x_{k-1} (P_k \neq P_{k-1})$, либо $2y_k (P_k = P_{k-1})$.
8.
 - 8.1 Если $D = n$, тогда либо возврат к шагу 5 и выбрать другое k , либо возврат к шагу 1 и выбор нового числа a ;
 - 8.2 Если $D = n$, тогда D есть нетривиальный делитель n и возврат (D);
 - 8.3 Если $D = 1$, тогда возврат к шагу 5 и выбрать другое k .

Основным преимуществом данного алгоритма является то, что оценка его сложности зависит от величины минимального простого делителя факторизируемого числа n , следовательно, этот метод может быть эффективно использован для отделения небольших простых делителей. Также стоит отметить, что метод Ленстры – единственный метод, время которого существенно уменьшается, если факторизируемое число n делится на простое число, значительно меньшее \sqrt{n} .

Однако самой замечательной особенностью факторизационного алгоритма Ленстры является исторически первое использование эллиптических кривых – интенсивно изучаемого объекта современной теории чисел, обладающего богатой структурой. Это показывает возможность появления новых методов разложения на множители.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pollard J. M. Theorems on factorization and primality testing./Proc. Cambridge Phill. Society. 1947, v.76, p. 527-578
2. Кнэпп Э. Эллиптические кривые. Пер. с англ. Ф. Ю. Попеленского. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2004. 488 с.
3. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии / М.: ТВП, 2001. – 260 с.
4. Болотов А.А., Гашков С. Б., Фролов А. Б. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Протоколы криптографии на эллиптических кривых. – М.: КомКнига, 2006. – 280 с.
5. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: Построение и анализ, 2-е изд. : Пер. с англ. И. В. Красикова. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

СЕКЦИЯ «ГЕОМЕТРИЯ»

Математическая модель процесса сближения двух поверхностей в пространстве

Камчатный С.А., Щербаков Н.Р.
Томский государственный университет
E-mail: kam-serega2030@sibmail.com

В 2007 году томскими конструкторами был разработан и запатентован новый вид зацепления в передаточных механизмах – «эксцентрово-циклоидальное зацепление». [1,2] В отличие от классического эвольвентного зацепления, в котором профили зубьев изготавливаются на основе эвольвенты окружности, в ЭЦ-зацеплении профили колес — циклоидальная кривая и эксцентрически повернутая окружность. Это зацепление может быть реализовано как с помощью составных колес, образованных повернутыми друг относительно друга прямозубыми венцами (рис. 1а), так и в виде непрерывного винтового эксцентрика и сопряженного с ним винтового циклоидального колеса (рис. 1б).



Рисунок 1а

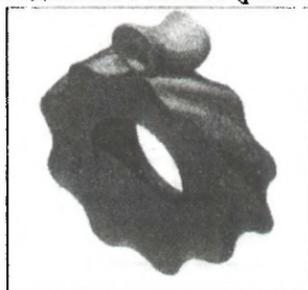


Рисунок 1б

Мы остановимся на рассмотрении детали (рис. б). Здесь профилем выходной детали является циклоидальная кривая – эквидистанта эпитрохида, а профилем входной детали – окружность. Детали образованы плоскопараллельным движением этих кривых. В результате получается, что зубья имеют линию контакта, а не точку, как у эвольвенты, что обеспечивает ряд преимуществ.

Современные многокоординатные станки с ЧПУ, способны обрабатывать поверхности весьма сложной конфигурации, но точность этой обработки, заложенная в компьютерной программе станка, не всегда удовлетворяет заказчика. Поэтому возникает необходимость создания специальной компьютерной программы управления движением фрезы, обрабатывающей деталь.

Поверхность фрезы – сфера. Необходимо найти координаты точек касания фрезы с выходной деталью при условии, что координаты центра сферы лежат в фиксированной плоскости.

Зададим эпитрохоиду в виде вектор-функции аргумента τ :

$$T\alpha(\tau) := \begin{pmatrix} -\varepsilon \cdot \cos(\tau) + \frac{D}{2} \cdot \cos\left(\frac{\tau}{n}\right) \\ -\varepsilon \cdot \sin(\tau) + \frac{D}{2} \cdot \sin\left(\frac{\tau}{n}\right) \end{pmatrix},$$

где ε – эксцентриситет, D – делительный диаметр, $n+1$ – количество циклов кривой.

Эквидистанта эпитрохоиды может быть записана в виде:

$$E(\tau) := T\alpha(\tau) + \frac{\rho \cdot N\alpha(\tau)}{|N\alpha(\tau)|},$$

где

$$N\alpha(\tau) := \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot \cos(\tau) - \frac{D}{2 \cdot n} \cdot \cos\left(\frac{\tau}{n}\right) \\ \varepsilon \cdot \sin(\tau) - \frac{D}{2 \cdot n} \cdot \sin\left(\frac{\tau}{n}\right) \end{pmatrix},$$

– вектор нормали в точки кривой, а ρ – радиус поперечного сечения винтового эксцентрика.

Таким образом, уравнения кривой, образующей деталь, имеют вид:

$$eO(\tau) := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{mN(\tau)} \right) \cdot \cos\left(\frac{\tau}{n}\right) \cdot D + \left(-1 + 2 \cdot \rho \cdot \frac{n}{mN(\tau)} \right) \cdot \cos(\tau) \cdot \varepsilon \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{mN(\tau)} \right) \cdot \sin\left(\frac{\tau}{n}\right) \cdot D + \left(-1 + 2 \cdot \rho \cdot \frac{n}{mN(\tau)} \right) \cdot \sin(\tau) \cdot \varepsilon \end{bmatrix}$$

Запишем уравнения поверхности выходной детали, полученной поворотом на угол $\nu/n-1$ эквидистанты с одновременным смещением по оси OZ на ν :

$$E\nu(\nu, \tau) := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\nu}{n-1}\right) \cdot e^{0(\tau)_0} + \sin\left(\frac{\nu}{n-1}\right) \cdot e^{0(\tau)_1} \\ -\sin\left(\frac{\nu}{n-1}\right) \cdot e^{0(\tau)_0} + \cos\left(\frac{\nu}{n-1}\right) \cdot e^{0(\tau)_1} \\ \frac{1}{2\pi} \cdot l r \cdot \nu \end{pmatrix},$$

где ν изменяется от 0 до 2π , а $l r$ – ширина детали.

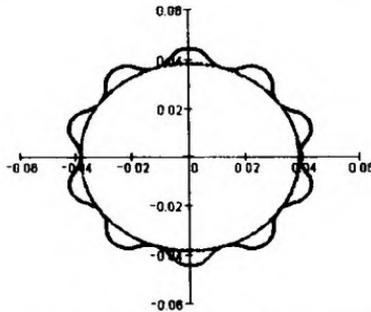


Рисунок 2 – Эквидистанта эпитроиды.

График поверхности выходной детали имеет вид:

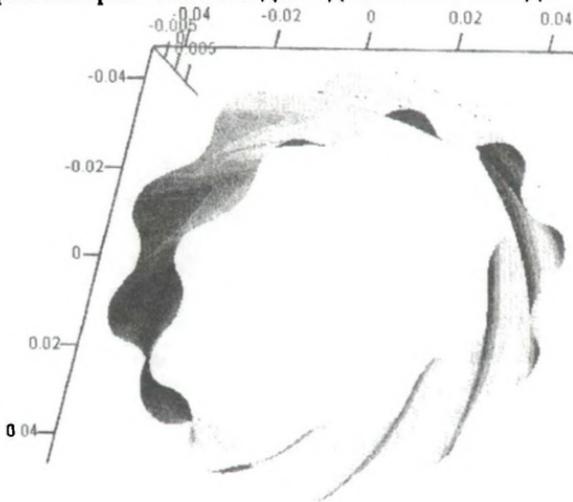


Рисунок 3 – Поверхность выходной детали.

Наша задача – найти точку касания 2-х сближающихся поверхностей: сферы (фрезы) и выходной детали.

По условию центр сферы всегда находится в одной плоскости $Z=0$. Найдем координаты центра сферы при условии касания сферы с выходной деталью. Это приводит к системе трех уравнений на четыре неизвестных, а именно:

1) условие того, что точка детали лежит на сфере с центром $(x, y, 0)$ диаметром df :

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ 0 \end{array} - \begin{array}{c} \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 + \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \\ -\sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 + \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \\ \frac{1}{2x} \cdot lr \cdot v \end{array} \right] = \frac{df}{2}$$

даёт первое уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} \left(x - \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 - \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \right)^2 \dots \\ + \left(y + \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 - \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \right)^2 + \frac{(lr \cdot v)^2}{x^2 \cdot 4} \end{array} \right] = \frac{df^2}{4}$$

2) из условия параллельности нормали в точке детали и вектора, идущего из этой точки в центр сферы, получаем еще 2 уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \left(y + \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 - \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \right) \cdot \frac{\sin\theta(\tau)_0 \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 + \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \cdot \sin\theta(\tau)_1}{n-1} \dots \\ + \frac{1}{4 \cdot x^2} \cdot lr^2 \cdot v \cdot \left(\cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 + \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \right) \end{array} \right] \dots$$

$$\left[\frac{1}{4 \cdot x^2} \cdot lr^2 \cdot v \cdot \left(-\sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 + \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \right) \right] \dots$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \left(x - \cos\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_0 - \sin\left(\frac{v}{n-1}\right) \cdot \sin\theta(\tau)_1 \right) \cdot \frac{\sin\theta(\tau)_0 \cdot \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 + \frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \cdot \sin\theta(\tau)_1}{n-1} \end{array} \right]$$

Выражая x и y из последних уравнений и подставляя их в первое (квадратное) уравнение, получаем квадратное уравнение на параметр v :

$$\left[\frac{1}{16} \cdot \frac{lr^4}{x^4 \cdot E0dl(\tau)^2} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 \right)^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{lr^4}{x^4 \cdot E0dl(\tau)^2} \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{lr^2}{x^2} \cdot v^2 - \frac{1}{4} \cdot df^2 = 0 \right]$$

которое имеет два решения:

$$v(\tau) = 2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{df}{\sqrt{lr^2 \cdot \left[lr^2 \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_0 \right)^2 + lr^2 \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\sin\theta(\tau)_1 \right)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot E0dl(\tau)^2 \right]}} \cdot E0dl(\tau)$$

$$u_2(\tau) := -2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{df}{\sqrt{lr^2 \cdot \left[lr^2 \cdot \left(\frac{d}{d\tau} e_0(\tau)_0 \right)^2 + lr^2 \cdot \left(\frac{d}{d\tau} e_0(\tau)_1 \right)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot E_0 d l(\tau)^2 \right]}} \cdot E_0 d l(\tau)$$

где

$$E_0 d l(\tau) := \frac{e_0(\tau)_0 \cdot \frac{d}{d\tau} e_0(\tau)_0 + \frac{d}{d\tau} e_0(\tau)_1 \cdot e_0(\tau)_1}{n - 1}$$

Таким образом, каждому заданному значению τ (т.е. линии на поверхности) соответствует два значения параметра v . Специальная подпрограмма выбирает то значение параметра v , которое соответствует положению сферы снаружи выходной детали.



Рисунок 5 – Касание фрезы с выходной деталью. Показана координатная линия, которую будет выгнать фреза. Пунктиром показано множество точек контакта сферы с деталью, при всех значениях параметра τ .

При обработке детали необходимо знать максимально допустимый радиус фрезы. Он находится как минимум радиусов кривизны всех нормальных сечений в точке локального минимума циклоидальной кривой, образующей деталь, по обычным формулам дифференциальной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент РФ 2362925. Режущее зацепление для линейного привода (варианты) / В.В. Становской, С.М. Казакиявичюс, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.М. Бубенчиков, Н.Р. Щербakov. Заявлено 18.04.2008; опубл. 27.07.2009, Бюлл. № 21.

2. V.V. Stanovskoy, S.M. Kazakavitschjus, T.A. Remnewa, W.M. Kuznetsov, A.M. Bubentschikov, N.R. Scherba-kov. Eine neue Art des Zahneingriffes mit krummlinigen Zähnen // *Antriebstechnik*. – 2009. – №11. – S. 78–83.

Экстремумы локальных деформаций при отображении поверхности на поверхность

Самылкина О.А., Бухтяк М.С.

Томский государственный университет

E-mail: samylikinairina@mail.ru

Отражающая поверхность параболической антенны представлена металлическим сетеполотном, соединенным с решетчатой конструкцией.

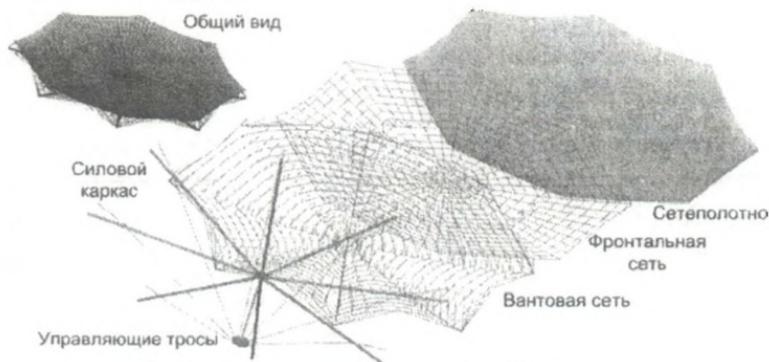


Рисунок 1 – Принципиальная схема рефлектора.

Раскрой сетеполотна предполагает учет локальных искажений длин при установлении точечного соответствия между плоской выкройкой и искривленной поверхностью рефлектора. Актуальна задача: вычисление локальных искажений длин для точечного соответствия поверхностей. Если поверхности - географы вектор-функций $r_1(u, v)$, $r_2(u, v)$, то мера искажения длин в касательном направлении $du : dv$ есть отношение первых квадратичных форм.

Рассматриваем осесимметричный параболический рефлектор, разделенный на конгруэнтные сектора. Для сектора рефлектора выкраивается плоский лепесток таким образом, чтобы при натягивании лепестка на жесткую конструкцию рефлектора обеспечить минимальные локальные искажения длин.

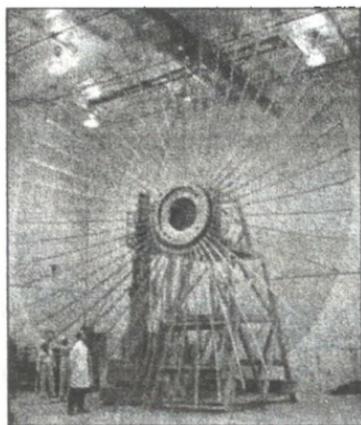


Рисунок 2 – Рефлектор в сборе (одна из возможных конструкций).

Введены криволинейные координаты u , v , общие для двух поверхностей. При этом для плоскости $\mathbf{r} = \{f(u)\cos v, f(u)\sin v, 0\}$, а для параболоида $\mathbf{R} = \{u \cos v, u \sin v, u^2(4F)^{-1}\}$ (F – фокусное расстояние). Точечное соответствие этих поверхностей обеспечивается выбором функции $f(u) \in C^2$. Построен алгоритм, позволяющий для значений u , v находить экстремальные значения (k_1 и k_2) величины k (алгоритм реализован в программной среде пакета компьютерной алгебры Maple V Release 4). Разработан также алгоритм, позволяющий минимизировать величину $\max(k_1, k_2)$.

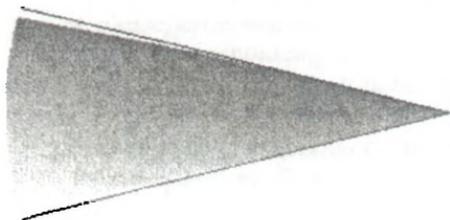


Рисунок 3

Рассчитана форма края лепестка, отвечающая минимизации локальных искажений длин.

Сплошная область – лепесток оптимальной формы. Прямыми линиями ограничен сектор, в который вписан лепесток.

Пример визуализации локальных искажений длин для конкретной функции $f(u)$ приведен ниже. Слева – лепесток, цвет

соответствует локальным искажениям длин. Справа – расшифровка цвета.

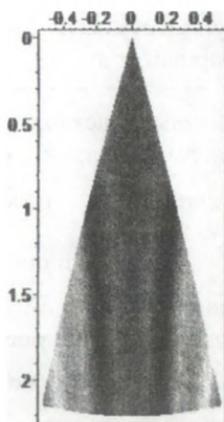


Рисунок 4

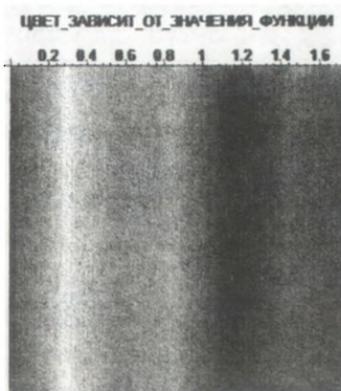


Рисунок 5

Средства Maple позволили создать визуализацию получаемых результатов, однако эта программа не позволяет наносить числовые значения непосредственно на изолинии. Поскольку проектировщикам эта информация важна, был привлечен пакет инженерной графики SURFER-9.

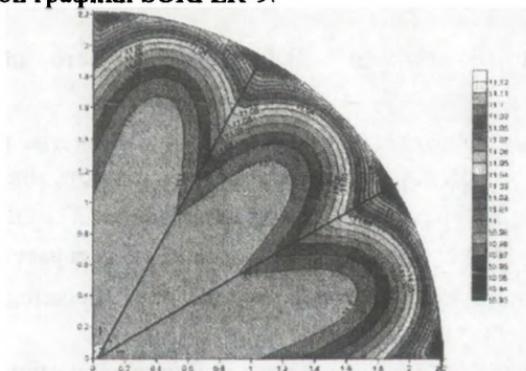


Рисунок 6 – Диаграмма искажений длин. Три сектора из 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В. Maple 6. Учебный курс. – С.-Пб: Питер, 2001, 603 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, 428 с.

Хроматическое число. Трёхмерный случай.

Тарновская Е. П., Корякина Е. Е.
Томский государственный университет
E-mail: elenatarnovskaya@sibmail.com

Рассмотрим трёхмерное - (евклидово) пространство, состоящее из всех возможных троек вещественных чисел, т. е. точек $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, и снабжённое (евклидовым) расстоянием

$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$. Величина χ - хроматическое число трёхмерного пространства.

Определение. Хроматическим числом евклидова пространства называется величина $\chi = \chi(R^3)$, равная минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки R^3 , чтобы расстояние между точками одного цвета не могло оказаться равным единице.

Наилучшими к настоящему времени являются следующие теоремы:

Теорема 1 (Д. Е. Райский, 1970). Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^3) \geq 5$

Теорема 2 (Д. Кулсон, 2000). Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$.

Определение. Множество точек A в пространстве называется (M, D) - критической конфигурацией, если мощность множества A равна M и в то же время в любом подмножестве F множества A , таком, что $|F| = D + 1$, найдётся пара точек F_1, F_2 на расстоянии 1.

Конфигурация искомая в теореме 1 является прямым обобщением конструкции братьев Мозеров.

Тетраэдр $A'_1 A_2 A_3 A_4$ образует иглу. Для получения полноценного трёхмерного веретена нужно бы образовать 3 иглы с нижним концом в A'_1 , а верхним - в такой точке C_1 , что одновременно

$|A_1C_1|=1$ и $|B_1C_1|=1$ Но для подтверждения факта $\chi(R^3) \geq 5$ достаточно вертена из двух игл $A_1A_2A_3A_4A'_1B_2B_3B_4B_1$ (см. рис. 1).

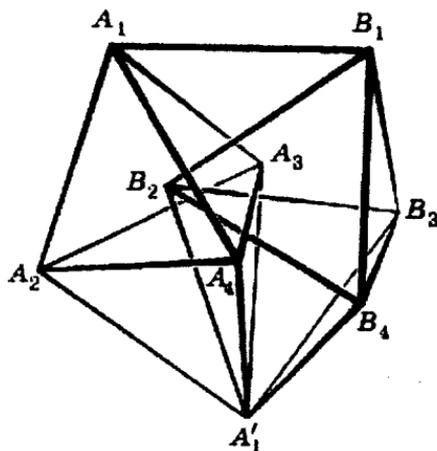


Рисунок 1

Легко может быть получена оценка $\chi(R^3) \leq 27$. Эта оценка является прямым переносом на трёхмерную ситуацию простейших методов, позволивших отыскать неравенства $\chi(R^1) \leq 2$ и $\chi(R^2) \leq 9$. На прямой можно чередовать отрезки, на плоскости - квадраты.

В пространстве нужно для тех же целей использовать кубы. Например, можно «замостить» всё R^3 «большими» кубами с длиной ребра 1,65, разбитыми, в свою очередь, одним и тем же способом на 27 «маленьких» кубиков-«цветов», имеющих длину ребра 0,55. Тогда длина диагонали в одноцветном кубике оказывается равна $0,55\sqrt{3} < 1$, а расстояние между любыми двумя одноцветными кубиками не меньше, чем $1,1 > 1$.

Результат Кулсона опирается на «решётчатую» технику. Используется эффективное построение раскраски, основанное на рассмотрении разбиений Вороного.

Определение. Решёткой Λ в пространстве называется множество всех точек вида

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = (ax_1 + by_1 + cz_1, ax_2 + by_2 + cz_2, ax_3 + by_3 + cz_3),$$

где векторы $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ некопланарны, а величины a , b и c принимают любые целочисленные значения. Говорят, что векторы \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} образуют базис решётки Λ .

Определение. Разбиением пространства на многогранники называется бесконечное множество T , состоящее из таких (многогранных) тел T_1, T_2, \dots что их объединение $T_1 \cup T_2 \cup \dots$ совпадает со всем R^3 и что любые два из них пересекаются, как максимум, по элементам границы (граням, рёбрам и вершинам).

Определение. Пусть дана некоторая решётка Λ . Многогранником Вороного, отвечающим точке \vec{x} этой решётки, называется множество $V_{\vec{x}}$, состоящее из всех точек пространства,

для которых точка \vec{x} есть одна из ближайших точек в Λ :

$$V_{\vec{x}} = \{ \vec{y} \in R^3 : |\vec{y} - \vec{x}| \leq |\vec{y} - \vec{z}| \forall \vec{z} \in \Lambda \}.$$

Какова бы ни была решётка Λ в пространстве, множество всех многогранников Вороного, отвечающих элементам $x \in \Lambda$, образует разбиение R^3 . Такое разбиение называется (решётчатым) разбиением Вороного. Общий рецепт построения раскраски: нужно взять какую-нибудь решётку Λ в R^3 и по определённому правилу раскрасить её многогранники Вороного в достаточно маленькое число цветов. Дальнейшая проблема состоит в том, чтобы цвета оказались расположенными в верном порядке, т. е. чтобы, с одной стороны, сами многогранники имели диаметр (наибольшее расстояние между точками), меньший единицы, а с другой стороны, расстояние между многогранниками одного цвета было больше единицы. Оценка $\chi(R^3) \leq 21$ (Сойфер, 1996 г.), может быть доказана за счёт рассмотрения решётки, порождённой базисом из векторов $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$; оценка $\chi(R^3) \leq 18$ (Кулсон, 1997 г.), следует из свойств разбиения Вороного для решётки с базисом

$(1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0, 1)$, а результат теоремы 2 обусловлен структурой решётки, построенной на векторах $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, 0\right)$. На рис. 2 изображены многогранники Вороного, отвечающие разбиению с базисом $(1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, 0, 1)$.

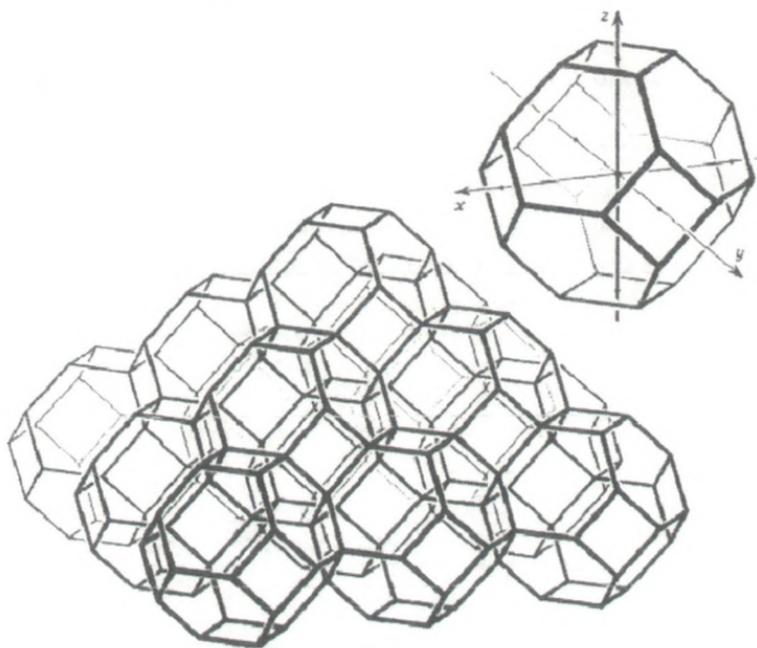


Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Райгородский А. М. Хроматическое число плоскости. //Математическое просвещение. - вып. - 28 - 2003. - с. 13 - 19.

Гиперповерхность в E_4 . Визуализация кривизны нормального сечения

Митина Т.А., Бухтяк М.С.

Томский государственный университет

E-mail: mitina2010@yandex.ru

Большая часть информации о мире получена нами визуально. Многие предметы, явления, понятия становятся в должной мере доступными нашему сознанию и осмыслению с того момента, как мы связываем с ними зрительные впечатления. В особенно полной мере это относится к объектам математики – в первую очередь геометрии. В числе важнейших инвариантов поверхности – её главные кривизны – экстремальные значения нормальной кривизны.

Геометрический смысл нормальной кривизны 2-поверхности в E_3 прояснён на Рис. 1: это кривизна в точке M плоской линии L , полученной рассечением поверхности Σ плоскостью β , проведенной через нормаль n . Положение рассекающей плоскости можно определить положением касательной к поверхности l , либо отношением дифференциалов $du^1 : du^2$ [1].

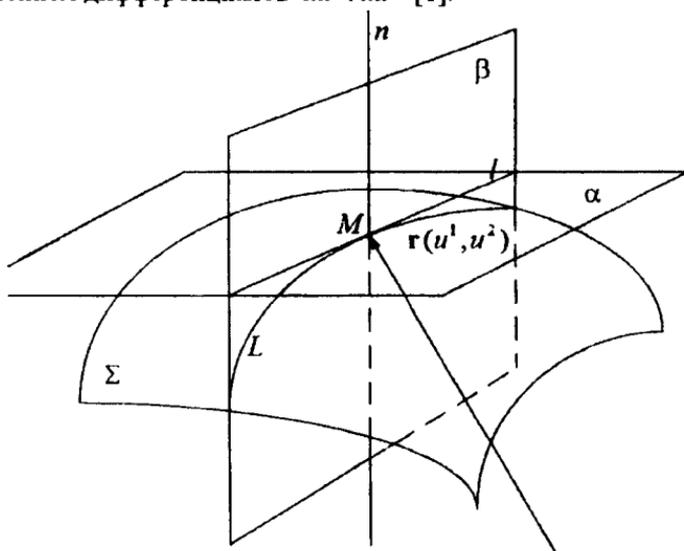


Рисунок 1

Кривизна нормального сечения поверхности в E_3 имеет простое изображение (хотя бы индикатрисой Дюпена). Задача визуализации становится нетривиальной для евклидова пространства E_n , где $n \geq 4$. Мы остановимся на случае $n = 4$.

Для гиперповерхности в E_4 мы используем метод, в известном смысле противоположный тому, на котором основана индикатриса Дюпена: на луче, задающем касательное направление в 3-пространстве параметров, отложим не радиус кривизны нормального сечения, а саму кривизну. При этом исключаем возможность ухода нашей индикатрисы в бесконечность (для асимптотического направления). Кривизна нормального сечения вычисляется как отношение второй квадратичной формы к первой. Важное обстоятельство: на касательной прямой гиперповерхности значение нормальной кривизны откладывается дважды (на прямой расположены два луча).

Касательные к гиперповерхности в некоторой её точке M_0 располагаются в касательной 3-плоскости, что и позволяет построить 2-мерную поверхность – диаграмму нормальной кривизны. Визуализация осуществляется в программной среде пакета символьной математики Maple V Release 4 [2].

Гиперповерхность задана вектор-функцией $\mathbf{r} = \{u^1, u^2, u^3, (u^1)^2 - 2u^1u^2 + (u^3)^2\}$. На Рис. 1 представлены проекции в E_3 гиперплоских сечений нашей гиперповерхности.

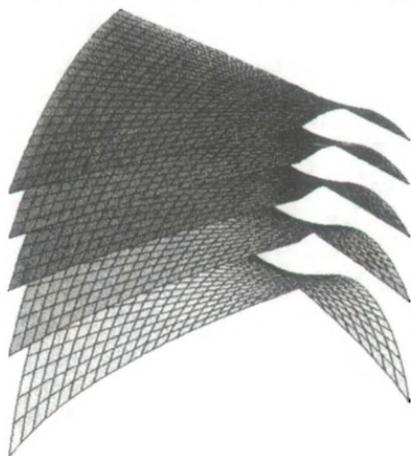


Рисунок 2

Приведена диаграмма кривизны нормальных сечений в некоторой точке A гиперповерхности. Черные отрезки указывают главные направления. Цвет зависит от кривизны нормального сечения.

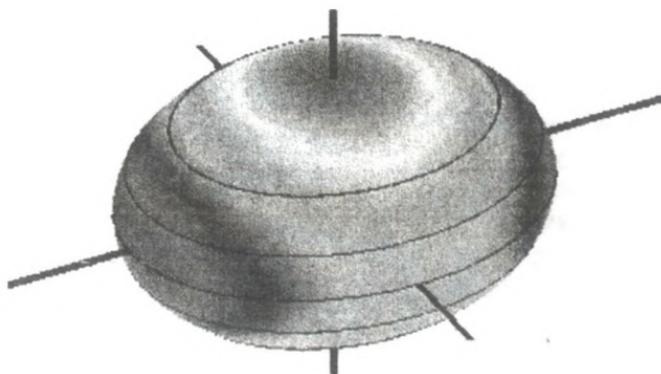


Рисунок 3 Главные направления. Цвет зависит от кривизны

Диаграмма нормальной кривизны (для нашей поверхности) существенно зависит от выбранной точки. Для примера приводим диаграмму в некоторой другой точке B .

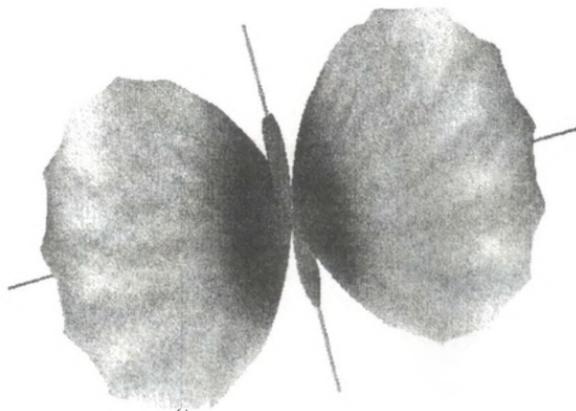


Рисунок 4

Марле позволяет провести «расшифровку» цветовой гаммы, указав, какому цвету какое число соответствует (правда, для этого

пришлось написать соответствующую программу-процедуру).
Результат работы процедуры приведен на Рис. 5.

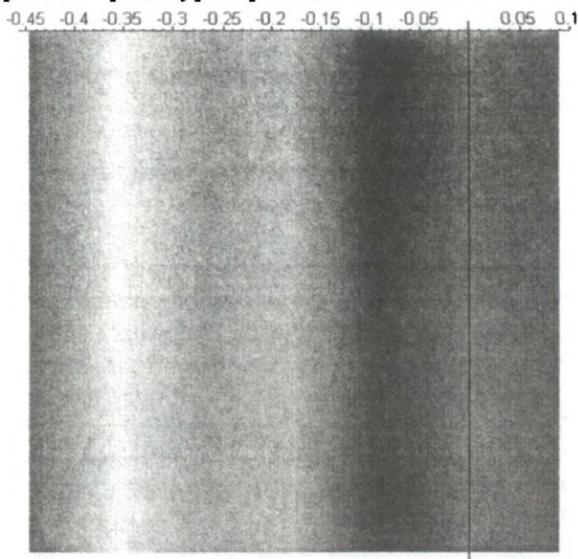


Рисунок 5

Maple – только один из пакетов символьной математики, располагающий мощными графическими возможностями. Однако его интерфейс представляется наиболее дружественным к пользователю, что и обусловило выбор в его пользу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, 428 с.
2. Дьяконов В. Maple 6. Учебный курс. – С.-Пб: Питер, 2001, 603 с.

Определение точки контакта при моделировании передаточного механизма с циклоидально- эксцентриковым зацеплением

Диль Д.О.

Томский государственный университет

E-mail: gradpower@list.ru

При моделировании передаточных механизмов существенную роль играет наиболее точное определение координат точки контакта взаимодействующих деталей [1,2]. В предыдущих работах - [3], [4] - были изложены методики расчёта координат точек и линий контактирования в идеализированных математических моделях. В реальности же используются передаточные механизмы с технологическим зазором, поэтому возникает необходимость формулировки дополнительных методик расчёта, чему и посвящена данная работа.

Рассмотрим плоское сечение передаточного механизма, построенного на базе циклоидально-эксцентрикового зацепления. Профилем большого вала является эквидистанта эпитрохоиды. Она получается путём удаления точек эпитрохоиды вдоль нормали на расстояние равное радиусу окружности, являющейся профилем малого вала (Рис. 1). В любой момент времени движения для осуществления контактирования необходимо, чтобы геометрический центр эксцентрично смещённой окружности находился на эпитрохоиде. Именно это требование используется для определения координат точки контакта.

Эпитрохоида, как и все циклоидальные кривые, образуется при качении одной окружности по другой. При этом прямая, соединяющая точку касания этих окружностей с геометрическим центром эксцентрично смещённой окружности, будет являться нормалью к эквидистанте эпитрохоиды, проведённой в точке контакта. Если в рассматриваемом механизме нет технологического зазора, точка контакта легко находится как точка пересечения этой прямой с эксцентрично смещённой окружностью. В случае наличия технологического зазора эксцентрик поворачивается до появления контакта. При этом угол доворота зависит от текущего положения частей передаточного механизма.

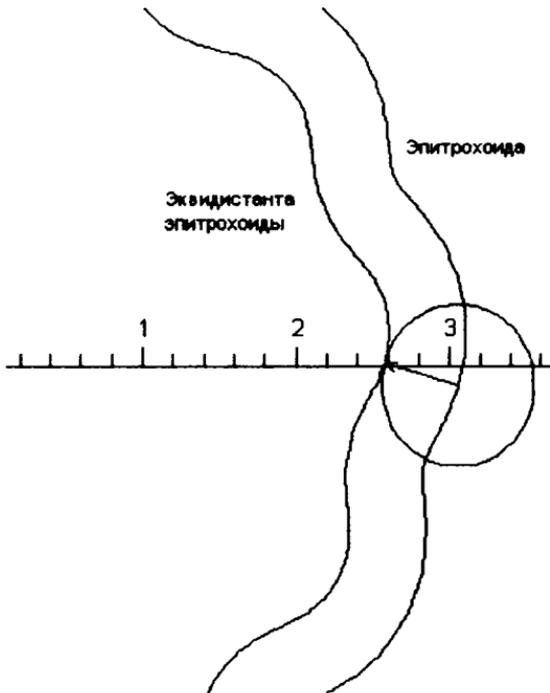


Рисунок 1 – Принцип построения эквидистанты эпитрохимы.

Рассмотрим момент времени, когда эквидистанта повернута по ходу стрелки часов относительно первоначального положения на произвольный угол φ . При этом эксцентрик будет повернут на угол $(n-1)\varphi$ в противоположном направлении. Осуществляя дополнительный поворот до появления контакта (Рис. 2), получим в результате положение эксцентрика, при котором его геометрический центр (обозначим его Р) окажется на эпитрохиме, повернутой на тот же угол φ . Следовательно, его координаты должны определяться по формулам:

$$\begin{aligned}x_p &= x(t)|_{t=p} \cos \varphi - y(t)|_{t=p} \sin \varphi, \\y_p &= x(t)|_{t=p} \sin \varphi + y(t)|_{t=p} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

где

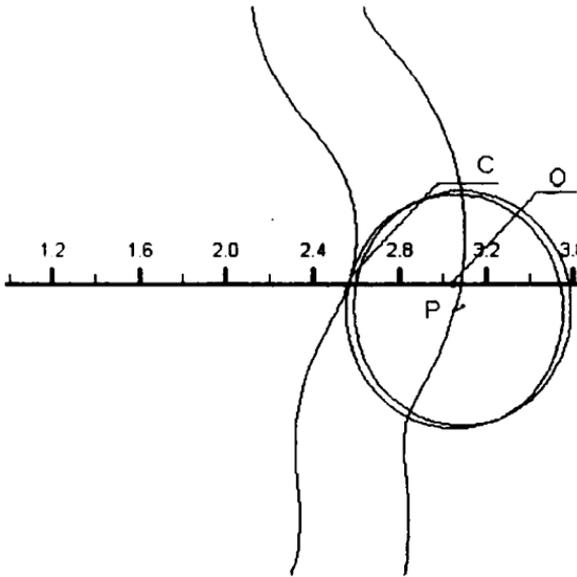


Рисунок 2 – Доворот эксцентрика до появления контакта.

$$\begin{aligned} x(t) &= -\varepsilon \cos t + h \cos \frac{t}{n}, \\ y(t) &= -\varepsilon \sin t + h \sin \frac{t}{n} \end{aligned} \quad (2)$$

– параметрические уравнения эпитрохиоиды с эксцентриситетом ε , межцентровым расстоянием h и числом циклов кривой $(n-1)$. Одновременно с этим, координаты точки P должны удовлетворять следующему уравнению

$$(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2 = \varepsilon^2, \quad (3)$$

поскольку расстояние ε до эксцентрично смещённого центра (обозначенного буквой O) должно оставаться постоянным. Координаты точки O равны:

$$x_o = H = h + \Delta h, y_o = 0. \quad (4)$$

Здесь H – межцентровое расстояние с технологическим зазором Δh . Подставляя (1) и (4) в (3) и проводя соответствующие математические преобразования, будем иметь следующее уравнение для определения параметра точки P :

$$H^2 + h^2 - 2\epsilon h \cos\left(p - \frac{p}{n}\right) - 2Hh \cos\left(\frac{p}{n} + \varphi\right) + 2H\epsilon \cos(p + \varphi) = 0. \quad (5)$$

Поскольку получение аналитического решения данного уравнения довольно затруднительно, оно определяется с помощью пакета Maple. Преимуществом данного метода является то, что, определив значение параметра, можно легко найти не только координаты геометрического центра Р, подставляя значение параметра, в уравнения (1), но и точки контакта С, подставляя это же значение в параметрические уравнения эквидистанты, повернутой на угол φ :

$$\begin{aligned} x_C &= x'(t)|_{t=p} \cos \varphi - y'(t)|_{t=p} \sin \varphi, \\ y_C &= x'(t)|_{t=p} \sin \varphi + y'(t)|_{t=p} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\epsilon \cos t + h \cos \frac{t}{n} - R x_N(t), \\ y'(t) &= -\epsilon \sin t + h \sin \frac{t}{n} - R y_N(t). \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнениях (7) через R обозначен радиус эксцентрично смещённой окружности, а через $x_N(t)$, $y_N(t)$ – координаты единичного вектора внешней нормали к эпитрохоиде в точке с параметром t.

В дальнейшем планируется обобщение описанного метода на случай винтового передаточного механизма, а также на случаи механизмов более сложной конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савёлов А.А. Плоские кривые. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 294 с.
2. Щербakov Н.Р. Математическое и компьютерное моделирование динамического состояния систем передачи движения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Том. гос. ун-т. – Томск, 2009. – 30 с.
3. Математическое моделирование работы редуктора с эксцентриково-циклондально-зацеплением / Диль Д.О. // Научная студенческая конференция механико-математического факультета: Сборник трудов конференции (Томск, 19 - 23 апреля 2010 г.) - Томск: Томский государственный университет, 2010 г. - С. 32-34.
4. Моделирование пространственного передаточного механизма с циклондально-эксцентриковым зацеплением / Диль Д.О. // Материалы всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики». Томск, 13 — 15 октября 2010 г. - Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2010 г. - С. 71-73.

СЕКЦИЯ «ГИДРОМЕХАНИКА»

Сравнительный анализ различных подходов к построению численного решения плоской задачи теплопроводности

Гусев С.И., Шеремет М.А.

Томский государственный университет

E-mail: Gusev@mexmat.org

Исследование различных алгоритмов построения численного решения прикладных задач математической физики позволяет определить наиболее оптимальные подходы для моделирования процессов переноса скалярных и векторных характеристик в сплошной среде. При этом все методики имеют как свои плюсы и минусы, так и различные границы применимости. Знание основных положений каждого из алгоритмов помогает выбрать наиболее удачный подход к решению сформулированной задачи [1].

В настоящей работе проведен сравнительный анализ различий между методом конечных разностей [2] и методом контрольного объема [3] решения краевой задачи переноса энергии в твердом материале. Процесс переноса тепла в однородной пластине описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

В расчетах коэффициент температуропроводности a принимается равным $0.001 \text{ м}^2/\text{с}$. На левой стенке задана постоянная температура T_h , на правой стенке – постоянная температура $T_c < T_h$. На верхней и нижней стенках – условия теплоизоляции.

В результате дискретизации дифференциального уравнения теплопроводности использовались равномерная и неравномерная разностные сетки.

Для равномерной сетки узлы выбирались по закону:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = \overline{0, N}; & h_x &= L/N, \\ y_j &= jh_y, \quad j = \overline{0, M}; & h_y &= H/M. \end{aligned}$$

Для неравномерной сетки использовались следующие формулы, позволяющие добиться сгущения разностной сетки к границам анализируемого объекта:

$$\begin{cases} x_i = \frac{L}{2} \left(\frac{2i}{N} \right)^k, & i = \overline{0, N/2}; \\ x_{\frac{N}{2}+i} = x_{\frac{N}{2}+i-1} + x_{\frac{N}{2}-i+1} - x_{\frac{N}{2}-i}, \\ y_j = \frac{H}{2} \left(\frac{2j}{M} \right)^k, & j = \overline{0, M/2}; \\ y_{\frac{M}{2}+j} = y_{\frac{M}{2}+j-1} + y_{\frac{M}{2}-j+1} - y_{\frac{M}{2}-j}, \end{cases}$$

где L – длина пластины, H – высота пластины, N и M количество отрезков по осям x и y , соответственно, k – параметр сгущения разностной сетки.

При соответствующем выборе параметра k получаем сетку, сгущающуюся к границам, что позволяет эффективно анализировать изменение температуры вблизи стенок.

В результате аппроксимации дифференциального уравнения конечными разностями [2] на неравномерной сетке получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_p T_{i,j}^{n+1} = a_E T_{i+1,j}^{n+1} + a_W T_{i-1,j}^{n+1} + a_N T_{i,j+1}^{n+1} + a_S T_{i,j-1}^{n+1} + \frac{1}{\tau} T_{i,j}^n, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{2a}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}, & a_W &= \frac{2a}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}, \\ a_N &= \frac{2a}{(y_{j+1} - y_j)(y_{j+1} - y_{j-1})}, & a_S &= \frac{2a}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})}, \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Использование равномерной разностной сетки позволяет несколько упростить форму представления коэффициентов

$$\text{системы: } a_E = a_W = \frac{a}{h_x^2}, \quad a_N = a_S = \frac{a}{h_y^2}.$$

Аппроксимация граничных условий на неравномерной разностной сетке примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{0,j} &= T_h, \quad T_{N,j} = T_c, \\ T_{i,0} &= \frac{(y_2 - y_0)^2 T_{i,1} - (y_1 - y_0)^2 T_{i,2}}{(y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2}, \\ T_{i,M} &= \frac{(y_M - y_{M-2})^2 T_{i,M-1} - (y_M - y_{M-1})^2 T_{i,M-2}}{(y_M - y_{M-2})^2 - (y_M - y_{M-1})^2}. \end{aligned}$$

В случае равномерной сетки получаем:

$$\begin{aligned} T_{0,j} &= T_h, \quad T_{N,j} = T_c, \\ T_{i,0} &= \frac{4T_{i,1} - T_{i,2}}{3}, \quad T_{i,M} = \frac{4T_{i,M-1} - T_{i,M-2}}{3}. \end{aligned}$$

Применение метода контрольного объема [3] приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$a_p T_{i,j}^{n+1} = a_E T_{i+1,j}^{n+1} + a_W T_{i-1,j}^{n+1} + a_N T_{i,j+1}^{n+1} + a_S T_{i,j-1}^{n+1} + b, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{a\Delta y}{x_E - x_p}, \quad a_W = \frac{a\Delta y}{x_p - x_W}, \quad a_N = \frac{a\Delta x}{y_N - y_p}, \quad a_S = \frac{a\Delta x}{y_p - y_S}, \\ b &= T_{i,j}^n / \tau, \quad a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + 1/\tau. \end{aligned}$$

Здесь рассматривается разностная сетка, в которой узловые точки расположены в центре контрольных объемов (способ II из [3]).

Полученная система линейных уравнений решается численно методом последовательной верхней релаксации [4]. При численной реализации использовались следующие значения входных параметров: число отрезков по координатам $N = M = 20$, точность вычислений $\epsilon = 10^{-4}$, шаг по времени $\tau = 10^{-3}$. Параметр релаксации

$\omega = 1.8$ обеспечивает наибольшую скорость сходимости выбранного метода.

В результате решения краевой задачи описанными методами были получены идентичные картины распределения температуры. На рис. 1 представлены изотермы при решении стационарной задачи теплопроводности ($L = 1.0, H = 0.5, T_h = 10, T_c = 0$). Вследствие наличия адиабатических горизонтальных стенок изотермы представляют собой вертикальные отрезки, распространяющиеся от изотермических стенок.

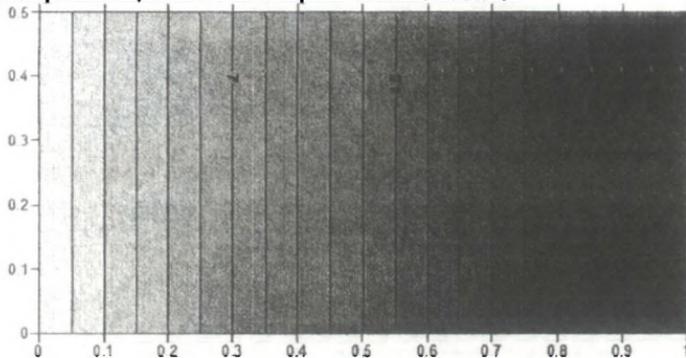


Рисунок 1 – Стационарное поле температуры

Сравнительный анализ скорости сходимости каждого из рассматриваемых методов дает следующие результаты:

Таблица 1

метод	сетка	число итераций при решении системы уравнений
контрольного объема	равномерная	138
	неравномерная	175
конечных разностей	равномерная	225
	неравномерная	489

Анализ таблицы показывает, что при решении достаточно простой диффузионной задачи метод контрольного объема обеспечивает наименьшее время вычислений.

В результате компьютерного моделирования двумерной нестационарной задачи теплопроводности проведен сравнительный анализ методов конечных разностей и контрольного объема.

Установлены масштабы влияния сеточных параметров на время численной реализации задачи, а также на погрешность вычислений. Показаны некоторые преимущества метода контрольного объема, обусловленные консервативностью получаемых разностных схем, а также несущественным влиянием вида разностной сетки на алгоритм построения сеточных уравнений. Необходимо отметить, что на основе метода контрольного объема можно проводить анализ гидродинамики и теплопереноса в естественных переменных «скорость – давление» [3], не прибегая при этом либо к введению дополнительных слагаемых в уравнение неразрывности (метод искусственной сжимаемости [5]), либо к преобразованию переменных (переход к переменным «функция тока – завихренность» [5, 6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК-396.2010.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
5. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Некоторые свойства гиперболических функций дробного анализа целочисленных порядков

Чуриков В.А.

Томский политехнический университет,

E-mail: vachurikov@list.ru

В дробном анализе формулы связывающие гиперболические синусы и косинусы и экспоненты любого вещественного порядка s обобщают подобные соотношения стандартного анализа [1]

$$\operatorname{sh}_s(x) = \frac{1}{2}(\exp_s(x) - \exp_s(-x)); \operatorname{ch}_s(x) = \frac{1}{2}(\exp_s(x) + \exp_s(-x));$$

$$\exp_s(x) = \operatorname{ch}_s(x) + \operatorname{sh}_s(x); \exp_s(-x) = \operatorname{ch}_s(x) - \operatorname{sh}_s(x).$$

Для целочисленных порядков, когда $s = k > 1$, эти формулы задают только по одному гиперболическому синусу и косинусу. Но этим все возможные гиперболические функции целочисленных порядков не исчерпываются.

В силу вырождения экспонент для целочисленных порядков $k > 1$, будет иметь место и вырождение гиперболических функций, причём большего порядка, чем в случае экспонент. Это приводит к ещё большему разнообразию гиперболических функций, чем разнообразие экспонент.

Обобщение соотношений для целочисленных порядков $k > 1$ с учётом экспоненциального вырождения запишем, $p, q, \mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, k$

$$\operatorname{sh}_k^{(p|\mu, q|\alpha)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) - \exp_k^{(q)}(-\alpha_\nu x));$$

$$\operatorname{ch}_k^{(p|\mu, q|\nu)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) + \exp_k^{(q)}(-\alpha_\nu x)).$$

Всего можно скомбинировать k^4 как гиперболических синусов, так и гиперболических косинусов порядка k .

В зависимости от корней инвариантности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$$\alpha_n = 1^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{i2\pi n}{k}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{k}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1,$$

можно выделить вещественные, вещественно-комплексные и комплексные гиперболические функции.

Вещественные функции являются линейными комбинациями вещественных экспонент с вещественным корнем инвариантности $\alpha_1 = 1$. Всего будет по k^2 вещественных гиперболических синусов и вещественных гиперболических косинусов порядка k

$$\text{sh}_k^{(p,q)}(x) \equiv \text{sh}_k^{(p||,q||)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(p||)}(x) - \exp_k^{(q||)}(-x));$$

$$\text{ch}_k^{(p,q)}(x) \equiv \text{ch}_k^{(p||,q||)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(p||)}(x) + \exp_k^{(q||)}(-x)).$$

Из этих вещественных функций можно выделить один главный гиперболический синус и один главный гиперболический косинус порядка k

$$\text{sh}_k(x) \equiv \text{sh}_k^{(1,1)}(x) \equiv \text{sh}_k^{(||,||)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(||)}(x) - \exp_k^{(||)}(-x));$$

$$\text{ch}_k(x) \equiv \text{ch}_k^{(1,1)}(x) \equiv \text{ch}_k^{(||,||)}(x) = \frac{1}{2}(\exp_k^{(||)}(x) + \exp_k^{(||)}(-x)).$$

Гиперболические синусы и косинусы можно представить в виде четырёхмерных матриц, которые можно записать так

$$\text{sh}_k^{(p|\mu, q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \text{sh}_k^{(1|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_k^{(1|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{sh}_k^{(1|\mu, k|\alpha)}(x) \\ \text{sh}_k^{(2|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_k^{(2|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{sh}_k^{(2|\mu, k|\alpha)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{sh}_k^{(k|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{sh}_k^{(k|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{sh}_k^{(k|\mu, k|\alpha)}(x) \end{pmatrix};$$

$$\text{ch}_k^{(p|\mu, q|\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}_k^{(1|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_k^{(1|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{ch}_k^{(1|\mu, k|\alpha)}(x) \\ \text{ch}_k^{(2|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_k^{(2|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{ch}_k^{(2|\mu, k|\alpha)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{ch}_k^{(k|\mu, 1|\alpha)}(x) & \text{ch}_k^{(k|\mu, 2|\alpha)}(x) & \dots & \text{ch}_k^{(k|\mu, k|\alpha)}(x) \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах каждый элемент сам является матрицей $k \times k$. Элементы с индексами $a = \mu = 1$ соответствуют вещественным функциям. Если один из индексов a и μ равен 1, а другой равен

$2, 3, \dots, k$, то тогда функции будут вещественно-комплексные. Если оба из индексов a и μ равны $2, 3, \dots, k$, то тогда функции будут комплексные, которых будет $(k-1)^4$.

Среди этих функций будем выделять симметричные, когда $p = q$ и несимметричные, при $p \neq q$.

Вещественные гиперболические синусы и косинусы для случаев, когда $a = \mu = 1$, можно представить в виде квадратных матриц $k \times k$.

Представление в виде дробнотепенных рядов любых вещественных порядков будет [1]:

$$\operatorname{sh}_k(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1} - (-x)^{n-1}}{\Gamma(ns)} \right); \operatorname{ch}_k(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1} + (-x)^{n-1}}{\Gamma(ns)} \right).$$

Данные формулы справедливы и для целочисленных порядков, но только для главных экспонент

$$\operatorname{sh}_k^{(1)}(x) \equiv \operatorname{sh}_k^{(III)}(x) = \frac{1}{2} (\exp_k^{(1)}(x) - \exp_k^{(1)}(-x)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nk-1} - (-x)^{nk-1}}{(nk-1)!} \right);$$

$$\operatorname{ch}_k^{(1)}(x) \equiv \operatorname{ch}_k^{(III)}(x) = \frac{1}{2} (\exp_k^{(1)}(x) + \exp_k^{(1)}(-x)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nk-1} + (-x)^{nk-1}}{(nk-1)!} \right);$$

Эти формулы легко обобщить и для дополнительных экспонент, заменив главные экспоненты любыми вещественными экспонентами. Тогда получим k^2 гиперболических синусов и такое же количество гиперболических косинусов, которые будут выражаться рядами

$$\operatorname{sh}_k^{(p,q)}(x) = \frac{1}{2} (\exp_k^{(p)}(x) - \exp_k^{(q)}(-x)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nk-p}}{(kn-p)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{nk-q}}{(kn-q)!} \right);$$

$$\operatorname{ch}_k^{(p,q)}(x) = \frac{1}{2} (\exp_k^{(p)}(x) + \exp_k^{(q)}(-x)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nk-p}}{(kn-p)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{nk-q}}{(kn-q)!} \right).$$

С учётом комплексных экспонент гиперболические синусы и косинусы будут записываться

$$\operatorname{sh}_k^{(p, \mu | q, \nu)}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\mu} x)^{nk-p}}{(kn-p)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha_{\nu} x)^{nk-q}}{(kn-q)!} \right);$$

$$\operatorname{ch}_k^{(p, \mu | q, \nu)}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\mu} x)^{nk-p}}{(kn-p)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha_{\nu} x)^{nk-q}}{(kn-q)!} \right).$$

При $k=1$, получим формулы стандартного анализа для гиперболического синуса и гиперболического косинуса.

Число гиперболических синусов и косинусов, которые можно составить из k^2 экспонент, будет k^4 .

Ряды гиперболических синусов и гиперболических косинусов чётных порядков в общем виде будут:

$$\operatorname{sh}_{2k}^{(p, \mu | q, \nu)}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\mu} x)^{2nk-p}}{(2nk-p)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha_{\nu} x)^{2nk-q}}{(2nk-q)!} \right);$$

$$\operatorname{ch}_{2k}^{(p, \mu | q, \nu)}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{\mu} x)^{2nk-p}}{(2nk-p)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha_{\nu} x)^{2nk-q}}{(2nk-q)!} \right).$$

Отсюда легко получить, что для чётных порядков будет справедливы равенства

$$\operatorname{ch}_{2k}(x) = 0; \quad \operatorname{sh}_{2k}(x) = \exp_{2k}(x).$$

Гиперболические синусы чётных порядков будут нечётными функциями

$$\operatorname{sh}_{2k}(x) = -\operatorname{sh}_{2k}(-x) = \exp_{2k}(x) = -\exp_{2k}(-x).$$

В более общем для симметричных гиперболических синусов и гиперболических косинусов с нечётными номерами, $p = 2i - 1, (i = 1, 2, 3, \dots, k)$, будут выполняться равенства

$$\operatorname{sh}_{2k}^{(2i-1)}(x) = \exp_{2k}^{(2i-1)}(x); \quad \operatorname{ch}_{2k}^{(2i-1)}(x) = 0.$$

Для симметричных гиперболических синусов и гиперболических косинусов с чётными номерами, $p = 2i, (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ будут выполняться равенства,

$$\operatorname{sh}_{2k}^{(2i)}(x) = 0; \quad \operatorname{ch}_{2k}^{(2i)}(x) = \exp_{2k}^{(2i)}(x).$$

Экспоненты чётных порядков с чётными номерами будут чётными, что можно записать в виде соотношений,

$$\exp_{2k}^{(2i)}(x) = \exp_{2k}^{(2i)}(-x); \quad i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Для нечётных порядков ряд главного гиперболического косинуса будут:

$$\operatorname{ch}_{2k-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(2k-1)-1} + (-x)^{n(2k-1)-1}}{(n(2k-1)-1)!} \right).$$

Отсюда видно, что главный гиперболический косинус нечётного целочисленного порядка является функцией чётной

$$\operatorname{ch}_{2k-1}(-x) = \operatorname{ch}_{2k-1}(x).$$

Ряды главных гиперболических синусов для нечётных порядков будут

$$\operatorname{sh}_{2k-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(2k-1)-1} - (-x)^{n(2k-1)-1}}{(n(2k-1)-1)!} \right).$$

Элементы ряда главного гиперболического синуса нечётного целочисленного порядка состоит из нечётных степеней аргумента, поэтому он будет нечётным

$$\operatorname{sh}_{2k-1}(-x) = -\operatorname{sh}_{2k-1}(x).$$

Свойства симметрии этих функций будут:

$$\operatorname{sh}_{2k-1}^{(p,q)}(-x) = -\operatorname{sh}_{2k-1}^{(q,p)}(x); \quad \operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,q)}(-x) = \operatorname{ch}_{2k-1}^{(q,p)}(x).$$

Для симметричного случая, когда $p = q$, получим свойство нечётности для гиперболических синусов и чётности для гиперболических косинусов

$$\operatorname{sh}_{2k-1}^{(p,p)}(-x) = -\operatorname{sh}_{2k-1}^{(p,p)}(x); \quad \operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,p)}(-x) = \operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,p)}(x).$$

Будут справедливы соотношения между симметричными и несимметричными функциями, которые обобщают свойства чётности и нечётности аналогичных функций стандартного

$$\operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,q)}(x) + \operatorname{sh}_{2k-1}^{(q,p)}(x) = \operatorname{ch}_{2k-1}^{(q,q)}(x) + \operatorname{sh}_{2k-1}^{(p,p)}(x);$$

$$\operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,q)}(x) - \operatorname{sh}_{2k-1}^{(q,p)}(x) = \operatorname{ch}_{2k-1}^{(p,p)}(x) - \operatorname{sh}_{2k-1}^{(q,q)}(x).$$

Из данных гиперболических функций можно скомбинировать гиперболические тангенсы и гиперболические котангенсы порядка k [2], которых будет по k^8 и которые можно представить в виде восьмимерных матриц

$$\operatorname{th}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x) = \frac{\operatorname{sh}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x)}{\operatorname{ch}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x)}; \quad \operatorname{cth}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x) = \frac{\operatorname{ch}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x)}{\operatorname{sh}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x)}.$$

Гиперболические секансы и косекансы будут:

$$\operatorname{csch}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x) = (\operatorname{sh}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x))^{-1}; \quad \operatorname{sech}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x) = (\operatorname{ch}_k^{(p\mu, q\alpha)}(x))^{-1}.$$

Элементы матриц $\operatorname{csch}_k^{(p,\mu,q|\alpha)}(x)$, $\operatorname{sech}_k^{(p,\mu,q|\alpha)}(x)$ надо понимать как элементы обратные к соответствующим элементам матриц $\operatorname{sh}_k^{(p,\mu,q|\alpha)}(x)$, $\operatorname{ch}_k^{(p,\mu,q|\alpha)}(x)$.

Соотношение между симметричными гиперболическими функциями целочисленного порядка k и порядка 1

$$\sum_{p=1}^k \operatorname{sh}_k^{(p,p)}(x) = \operatorname{sh}(x); \quad \sum_{p=1}^k \operatorname{ch}_k^{(p,p)}(x) = \operatorname{ch}_1(x) \equiv \operatorname{ch}(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d -оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.
2. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Уравнение для отображения с симметрией переноса на круговой счетноугольник

Колесников И. А.

Томский государственный университет

E-mail: Ivan-delfin@list.ru

Решенная задача относится к геометрической теории аналитических функций. Одной из основных задач теории конформных отображений является построение отображения из канонической односвязной области, в качестве которой обычно выступает единичный круг или верхняя полуплоскость, на заданную односвязную область [1-5]. Полученные для этих отображений уравнения и формулы широко используются в теории отображений и в различных приложениях теории функции комплексного переменного. В частности, отображения заданные на полуплоскости помогают в некоторых вопросах механики сплошных сред, интерполяционных проблемах в теории голоморфных отображений и др. Настоящее исследование сосредоточено на получении уравнения для отображения с симметрией переноса верхней полуплоскости на круговой счетноугольник.

Рассмотрим голоморфную функцию $f(z)$, областью определения которой является верхняя комплексная полуплоскость, а областью значений – круговой односвязный счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π . Область Δ считаем областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если при линейном преобразовании сдвига вида $L(w)=w+2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta)=\Delta$. Ограничимся рассмотрением областей типа полуплоскости, т. е. таких областей, у которых при указанных преобразованиях сдвига среди всех простых концов в точке ∞ неподвижным остается только один простой конец. Также сузим область значений функции $f(z)$ договорившись, что граница области Δ состоит из счетного числа дуг окружностей. Таким образом, областью значений функции является круговой односвязный счетноугольник. Обозначим вершины счетноугольника $A_s^k = A_s^0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и углы при вершинах соответственно α_s, π , $s=1, \dots, n$, двигаясь в положительном направлении по границе области Δ , как показано на рисунке 1.

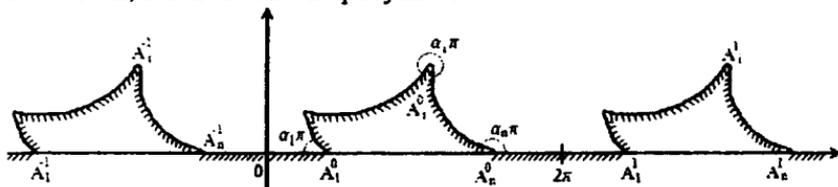


Рисунок 1

Согласно теореме Римана существует конформная и однолистная функция $f(z)$, отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z: \text{Im}z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса. Для искомого отображения $f(z)$ получено аналитическое представление в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1 - (\alpha_s)^2 - 2M_s \sin(\alpha_s^0 - z)}{\sin^2 \frac{\alpha_s^0 - z}{2}} + g(z), \quad (1)$$

где α_s^0 , $s=1, \dots, n$ - прообразы вершин A_s^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi)$, M_s , $s=1, \dots, n$ - вычеты производной Шварца функции $f(z)$ в точках α_s^0 . Целая функция $g(z)$ подлежит определению из условий конкретной задачи. В

левой части полученного дифференциального уравнения мы видим производную Шварца функции $f(z)$ которую обозначим $F(z)$.

Согласно принципу симметрии Римана-Шварца продолжим функцию $F(z)$ из верхней полуплоскости на всю плоскость.

Продолженная функция голоморфна в комплексной плоскости за исключением прообразов вершин. В окрестностях прообразов вершин a_s^k функцию $F(z)$ раскладываем в ряд Лорана

$$F(z) = \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} + \sum_{r=0}^{+\infty} c_r (z - a_s^k)^r.$$

Вычитая из функции $F(z)$ главные части разложений ряда Лорана в каждой особой точке, получаем целую функцию $g(z)$

$$g(z) = F(z) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} \right].$$

Учитывая, что $a_s^k = a_s^0 + 2k\pi$, запишем

$$F(z) = \sum_{s=1}^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2\pi k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2\pi k} \right] + g(z).$$

Заметим, что ряд является суммируемым, так как его можно представить в виде двух известных сходящихся бесконечных сумм:

$$\frac{1 - \alpha_s^2}{8} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{a_s^0 - z}{2\pi} - k \right)^2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{8} \frac{1}{\sin^2 \frac{a_s^0 - z}{2}},$$

$$\frac{M_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_s^0}{2\pi} + k} = \frac{M_s}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{z - a_s^0}{2} \right).$$

После алгебраических преобразований предельных функций получаем дифференциальное уравнение (1).

Рассмотрим круговой счетноугольник, вершины которого находятся в точках $2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; углы при вершинах равны $\alpha\pi$ (рисунок 2). В области определения функции $f(z)$, отображающей на заданный счетноугольник, промежутку $[0, 2\pi)$ принадлежит один из прообразов вершин - a_1^0 ; $a_1^0 = 0$. Полагаем $g(z) = 0$.

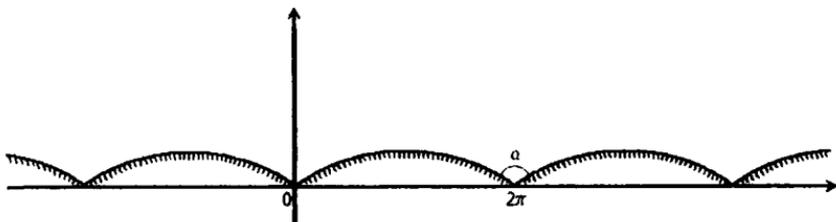


Рисунок 2.

В данном случае уравнение (1) примет вид:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1 - \alpha^2 + 2M \sin z}{8 \sin^2 \frac{z}{2}}.$$

С помощью замен $t = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}$, $e^z = u$ получаем уравнение

класса Фукса с регулярными особыми точками 0, 1, ∞

$$t'' + \frac{1}{u} t' - \frac{1}{4} \left(\frac{iM}{u} - \frac{1 - \alpha^2}{u - 1} + iM \right) \frac{t}{u(u-1)} = 0.$$

Сделав подстановку $w = u^{\frac{i\sqrt{M}}{2}} (u-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ и обозначая $\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i) + 1 + \alpha) = \delta$, $\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i) + 1 + \alpha) = \beta$, $1 + i\sqrt{iM} = \gamma$, уравнение примет вид

$$u(u-1)w'' + [\gamma - (\delta + \beta + 1)]w' - \delta\beta = 0.$$

Это есть известное дифференциальное уравнение Гаусса, ему удовлетворяет гипергеометрический ряд $w = F(\delta, \beta, \gamma, u)$. Сделав подстановку $w = u^{1-\gamma} w_1$, получим еще один интеграл $w = u^{1-\gamma} F(\delta - \gamma + 1, \delta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u)$ уравнения (2) линейно не зависимый с первым.

Возвращаясь к z , $f(z)$ и выражая гипергеометрические ряды через определенные интегралы, получим

$$f(z) = ce^{z\sqrt{iM}} \frac{\int_0^1 v^{\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)-1+\alpha)} (1-v)^{-\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha)} (1-e^{iv})^{\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)-1-\alpha)} dv}{\int_0^1 v^{\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)-1+\alpha)} (1-v)^{-\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)-1-\alpha)} (1-e^{iv})^{-\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha)} dv},$$

$$\text{где } c = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\delta-\gamma+1)\Gamma(1-\delta)\Gamma(\gamma)}.$$

Рассмотрим круговой счетноугольник, вершины которого находятся в точках $A_1^k = A_1^0 + 2\pi k$, $A_2^k = A_2^0 + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, углы при вершинах равны $\alpha\pi$ (рисунок 3). В области определения функции $f(z)$, отображающей на заданный счетноугольник, промежутку $[0, 2\pi)$ принадлежит два прообраза вершин - a_1^0 , a_2^0 ; $a_1^0 = \frac{\pi}{2}$, $a_2^0 = \frac{3\pi}{2}$. Полагаем $g(z) = 0$.

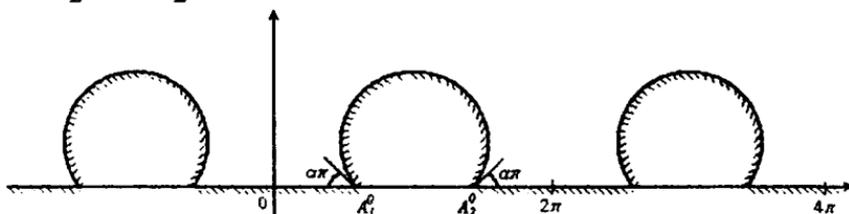


Рисунок 3

В данном случае уравнение (1) примет вид:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1 - \alpha^2 - (M_1 - M_2) \cos z - \frac{M_1 + M_2}{2} \sin 2z}{2 \cos^2 z} + g(z).$$

Выполнив замены переменных $t = \frac{1}{\sqrt{f'(z)}}$, $e^z = u$, получаем

уравнение класса Фукса с четырьмя особыми точками:

$$t'' + \frac{1}{u} t' - \frac{(1 - \alpha^2)u - \frac{M_1 - M_2}{2}(u^2 + 1) + \frac{i(M_1 + M_2)}{4}(u^2 - 1)}{u(u+i)^2(u-i)^2} t = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И. А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ, 2002.-510 с.: ил.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч1, М.: Физматлит, 1963.-343 с.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1950.-436 с.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. М.: Наука. Физматлит, 1966.-628 с.: ил.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука. Физматлит, 1973.-736 с.

Об области значений функционала в задаче о неналегающих областях

Пчелинцев В.А., Александров И.А.
Томский государственный университет
E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru

Задачи о неналегающих областях имеют богатую историю и непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций комплексного переменного. Такие задачи были впервые поставлены в 1934 году М.А. Лаврентьевым [4]. Значительные результаты в решении подобного рода задач получены: П.П. Куфаревым, Г.М. Голузиным, Н.А. Лебедевым и другими математиками. В данной работе исследуется область E значений функционала

$$\xi = \ln \frac{f(z_0)}{F(\zeta_0)} \quad (1)$$

при фиксированных z_0 и ζ_0 соответственно из $0 < |z_0| < 1$ и $1 < |\zeta_0| < \infty$ в классе \mathcal{M} .

Классом \mathcal{M} называют множество пар функций $(f(z), F(\zeta))$, $f(0)=0$, $F(\infty)=\infty$, голоморфных, однолистных и без общих значений в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и в его внешности $U^* = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$.

Если $(f(z), F(\zeta)) \in \mathcal{M}$ и φ, ψ — вещественные числа, то $(f(ze^{i\varphi}), F(\zeta e^{i\psi})) \in \mathcal{M}$. В связи с этим будем считать, что z_0 и ζ_0 — положительные числа: $z_0=r \in (0,1)$, $\zeta_0=\rho \in (1,+\infty)$. Таким образом, область E значений функционала $\xi = \ln(f(z_0)/F(\zeta_0))$ совпадает с областью значений функционала $\xi = \ln(f(r)/F(\rho))$.

Множество E замкнуто связно ограничено. Нахождение области E сводится [1] к нахождению минимума J_0 выражения

$$J = \left| \ln \frac{f(r)}{F(\rho)} - a \right|$$

в классе \mathfrak{M} для произвольной точки $a \in E$.

Пусть $(f(z), F(\zeta))$ – пара функций из \mathfrak{M} , для которой минимум J_0 функционала J реализуется. Функции такой пары назовем экстремальными. Для исследования поставленной задачи используется метод внутренних вариаций. Запишем вариационные формулы для экстремальных функций $f(z), F(\zeta)$ на классе \mathfrak{M} в виде

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon P(z) + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned}$$

при ε положительном и достаточно малом, где $o(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри U и $o(\zeta, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри U^* .

Если пара функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$, то при $\varepsilon > 0$, достаточно малом, классу \mathfrak{M} также принадлежит:

1) пара функций

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon A \frac{f(z)}{f(z) - w_0}, \quad F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0}, \quad (2)$$

где w_0 – внешняя точка одновременно для областей $f(U)$ и $F(U^*)$, A – произвольная комплексная постоянная;

2) пара функций

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left(A \frac{f(z)}{f(z) - f(z_0)} - A \frac{f(z_0)}{z_0 f'^2(z_0)} \cdot \frac{zf'(z)}{z - z_0} + \right. \\ &\quad \left. + \overline{A} \frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 f'^2(z_0)} \frac{z^2 \overline{f'(z)}}{1 - \overline{z_0} z} \right) + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon A \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - f(z_0)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $z_0 \in U$, A – произвольная комплексная постоянная;

3) пара функций

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon A \frac{f(z)}{f(z) - F(\zeta_0)},$$

$$F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon \left(A \frac{F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} - A \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0^2 F'^2(\zeta_0)} \frac{\zeta^2 F'(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} + \overline{A} \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0^2 F'^2(\zeta_0)} \frac{\zeta F'(\zeta)}{1 - \zeta_0 \zeta} \right) + o(\zeta, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\zeta_0 \in U^*$, A – произвольная комплексная постоянная.

Пусть $(f(z), F(\zeta))$ – пара экстремальных функций из \mathfrak{M} , соответствующих некоторой точке $a \in E$, и $(f(z, \varepsilon), F(\zeta, \varepsilon))$ – варьируемые функции, полученные по одной из пар формул (2), (3) или (4). Тогда

$$J_* = \left| \ln \frac{f(r, \varepsilon)}{F(\rho, \varepsilon)} - a \right| \geq \left| \ln \frac{f(r)}{F(\rho)} - a \right| = J_0.$$

Из этого соотношения следует, что каждая пара экстремальных функций удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} \frac{F(\rho)P(r) - f(r)Q(\rho)}{f(r)F(\rho)} \right) \geq 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \arg(\xi_0 - a).$$

С помощью (5) и (2) нетрудно доказать, что область $f(U)$ при отображении $w=f(z)$ и область $F(U^*)$ при отображении $w=F(\zeta)$ таковы, что $f(U) \cup F(U^*)$ не имеет в \mathbb{C} внешних точек.

Применив неравенство (5) совместно с парой вариационных формул (3) и с парой вариационных формул (4), получаем дифференциальные уравнения для экстремальных функций.

Теорема. Каждая экстремальная пара функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}$ функционала (1) удовлетворяет функционально-дифференциальным уравнениям

$$e^{-i\alpha} \frac{zf'^2(z)}{f(z)} \left(\frac{1}{f(z) - F(\rho)} - \frac{1}{f(z) - f(r)} \right) = \frac{C}{(r-z)(1-rz)},$$

$$e^{-i\alpha} \frac{\zeta F'^2(\zeta)}{F(\zeta)} \left(\frac{1}{F(\zeta) - F(\rho)} - \frac{1}{F(\zeta) - f(r)} \right) = \frac{D}{(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)}, \quad (6)$$

$$C = e^{-i\alpha} \frac{r f'(r)}{f(r)} (1-r^2) > 0; \quad D = e^{-i\alpha} \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} (\rho^2 - 1) > 0.$$

Из аналитической теории дифференциальных уравнений [2] следует, что всякое решение уравнений (6) не имеет особых точек. Значит, экстремальные функции $w=f(z)$ и $w=F(\zeta)$ не имеют на окружностях $|z|=1$ и соответственно $|\zeta|=1$ особых точек. Общей границей образа круга U при отображении $w=f(z)$ и образа внешности круга U' при отображении $w=F(\zeta)$ является замкнутая жорданова аналитическая кривая $\partial E(r, \rho)$.

Выполнив интегрирование уравнений (6) по определенным путям, а также проведя дополнительные исследования, находим уравнение границы области E значений функционала $\xi = \ln(f(r)/F(\rho))$:

$$\xi = \xi(\lambda) = \ln \left(16q \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}} \right]^8 \right), \quad 0 \leq \lambda < 2,$$

где

$$q = e^{-\pi\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)} + \frac{K\left(\sqrt{1-\frac{1}{\rho^2}}\right)}{K\left(\frac{1}{\rho}\right)} \right\} + \lambda i,$$

и

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода. Под радикалом $\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$ понимается та ветвь, которая обращается в единицу при $\varphi=0$.

При решении задачи о множестве E использовалась работа Н.А. Лебедева [5], помощь и советы И.А. Александрова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций/ И.А. Александров. – Томск: Том. гос. ун-т, 2001, 220с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений/ В.В. Голубев. – М. Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1950.436с.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного/ Г.М.Голузин. – М.: Наука, 1966, 628с.
4. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений/ М.А. Лаврентьев.– физико-математического института им. В.А. Стеклова АН СССР.–1934.–Т.5.–с.159 – 246.
5. Лебедев Н.А. Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях/ Н.А. Лебедев.–Докл. АН СССР.–1957.–Т.115, №6.–с.1070 – 1073.

Об одном совершенном семействе множеств

Шишкова А.А., Касаткина Т.В.

Томский государственный университет

E-mail: Shishkova@sibmail.com

Как известно, если числовое множество является замкнутым, без изолированных точек (т.е. любая точка этого множества является предельной), то его принято называть совершенным. Фундаментальным результатом, относящимся к совершенным множествам, является то, что всякое непустое совершенное множество из \mathbb{R} несчетно, более того его мощность равна мощности множества \mathbb{R} . Самым знаменитым примером совершенного нигде ни плотного множества нулевой меры является канторово множество C . Этот пример был построен немецким математиком Гергом Кантором, поэтому множество названо в его честь [1-5].

Георг Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел, доказал несчетность множества всех действительных чисел, установив таким образом существование неэквивалентных бесконечных множеств. Также он сформулировал общее понятие мощности множества.

Метод построения канторова множества в несколько измененном виде можно применить для построения целого семейства линейных дисконтинуумов положительной меры.

Построим полезное семейство совершенных нигде неплотных множеств. Каждое из этих множеств есть множество точек, остающихся на отрезке $[0,1]$ после удаления из него последовательности открытых интервалов следующим образом.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Из отрезка $[0,1]$ на первом шаге выбросим интервал с центром в точке $\frac{1}{2}$ длины $\frac{1}{2}\alpha$. Из двух оставшихся отрезков удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна $\frac{1}{4}\alpha$. На n шаге мера удаленных открытых интервалов будет равна $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + 2^{-n})$. После бесконечного числа удалений открытых интервалов меры α , оставшееся множество A_α меры $(1-\alpha)$ назовем канторовым множеством положительной меры. Построенное таким образом семейство множеств $\{A_\alpha \mid 0 < \alpha < 1\}$ является нигде неплотным совершенным множеством, не пустым, замкнутым, не содержащим изолированных точек и имеет мощность равную мощности множества \mathbb{R} .

В работе были сформулированы и доказаны следующие теоремы:

Теорема. Каждое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ канторова множества.

Теорема. Все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфны. Более того, существует гомеоморфизм f отрезка $[0,1]$ на отрезок $[0,1]$, такой, что $f(C) = A_\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Гельбаум, Дж. Олмстед Контрпримеры в анализе – Москва, 2007г..
2. Математическая энциклопедия.
3. И.П. Нотансон. Теория функций вещественной переменной – Москва, 1974 г.
4. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва, 1977 г. .
5. Ф.А. Медведев. Развитие теории множеств в 19 веке- Москва, 1965 г. .

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»

Применение параллельного алгоритма к численной реализации модели самоочищения водной среды в одномерной постановке

Абеляшев Д.Г., Дорощук Е.В., Михайлов М.Д.
Томский государственный университет
E-mail: E_lenochka@sibmail.com

Предлагается параллельный алгоритм численного решения одномерной краевой задачи, описывающей процесс переработки загрязнений, растворённых в воде, с помощью микроорганизмов (процесс «сорбции» на основе кинетики Моно).

В последние годы большое внимание уделяется проблеме очистки сточных вод предприятий и коммунальных хозяйств. Известно, что загрязнённая вода способна к самовосстановлению в природных условиях. Интенсивность этого процесса не велика. Поэтому необходимо создавать технологии очистки вод. Рассмотрим один из видов очистки – биологический, являющийся безотходным, когда процесс проходит с помощью микроорганизмов. Дадим математическое описание изучаемой методики.

Классическая модель Моно представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_m XL}{K_L + L}, \\ \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{Y} \frac{\mu_m XL}{K_L + L}, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями

$$X(0) = X^0, L(0) = L^0, \quad (2)$$

где L, X, μ_m, K_L, Y – указаны в [1].

В водной среде микроорганизмы взаимодействуют друг с другом, образуя колонии или, так называемую, биоплёнку, которая лежит в основе биологической очистки. Биоплёнка представляет собой пористую матрицу из внеклеточных полимерных материалов, вырабатываемых бактериями, и на 70 % состоит из живых организмов. Модель Моно (1) учитывает самые общие явления, такие, как рост и отмирание бактерий, насыщение, ингибирование высокой концентрацией субстрата [1]. Следует отметить, что наряду с процессами биоокисления необходимо рассматривать механизмы образования и распада хлопьев активного ила и взаимодействие их со средой.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать систему с активным илом, где протекает процесс «сорбции» или поглощения [2]:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -kL(X_c^* - X_c); \\ \frac{dX_c}{dt} = kL(X_c^* - X_c) - \frac{1}{Y} \mu(X_c)X_a; \\ \frac{dX_a}{dt} = \mu(X_c)X_a - bX_a; \\ L(0) = L^*, X_c(0) = X_c^*, X_a(0) = X_a^*, \end{cases} \quad (3)$$

где L, X_c, X_c^*, X_a, k, b - указаны в [2]; $\mu(X_c) = \frac{\mu_m X_c}{K_L + X_c}$.

Заметим, что член bX_a в третьем уравнении системы (3) задаёт линейный закон отмирания бактерий. С. Пыльник предложил [3] использовать вместо линейного квадратичный закон отмирания бактерий:

$$\frac{dX_a}{dt} = \mu(X_c)X_a - bX_a^2. \quad (4)$$

Численная реализация модели (3) осуществляется с помощью явного метода Эйлера. Результаты расчётов приведены на рис. 1 и 2.

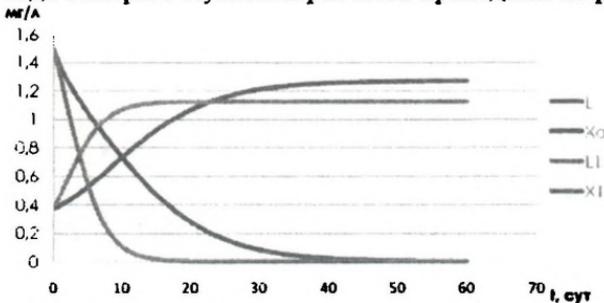


Рисунок 1 – Сравнение модели Моно и сорбционной модели.

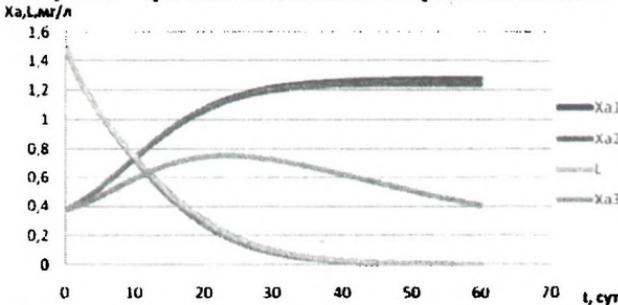


Рисунок 2 – Сорбционная модель с учетом процесса отмирания

Из рис. 2 видно, что квадратичный закон более реально описывает рост, насыщение и отмирание бактерий (кривая X_{a2}) в сравнении с линейным (кривая X_{a3}). Действительно, на поверхности хлопьев активного ила микроорганизмы способны накапливать загрязнитель, которые поддерживают их жизнедеятельность, когда его концентрация в среде становится

минимальной. На этом же графике наблюдается небольшое изменение биомассы X_a к концу рассматриваемого промежутка времени, $t=60$ сут при использовании самоокисления бактерий по закону bX_a^2 .

Осуществлена пространственная реализация модели (1) в одномерном случае [1]. Поставим первую краевую задачу для системы (3), модифицируя её с помощью добавления конвективного и диффузионного членов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial y} &= \Gamma_1 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - kL(X_c^* - X_c); \\ \frac{\partial X_c}{\partial t} + U \frac{\partial X_c}{\partial y} &= \Gamma_2 \frac{\partial^2 X_c}{\partial y^2} + kL(X_c^* - X_c) - \frac{1}{Y} \frac{\mu_m X_c}{K_L + X_c} X_a; \\ \frac{\partial X_a}{\partial t} + U \frac{\partial X_a}{\partial y} &= \Gamma_3 \frac{\partial^2 X_a}{\partial y^2} + \frac{\mu_m X_c}{K_L + X_c} X_a - bX_a; \end{aligned} \quad (5)$$

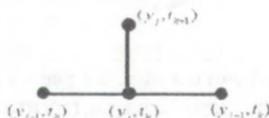
$$\left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_a = \left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_b = 0; \quad \left. \frac{\partial X_c}{\partial y} \right|_a = \left. \frac{\partial X_c}{\partial y} \right|_b = 0; \quad \left. \frac{\partial X_a}{\partial y} \right|_a = \left. \frac{\partial X_a}{\partial y} \right|_b = 0;$$

$$L(y, 0) = L^0(y), X_c(y, 0) = X_c^0(y),$$

$$X_a(y, 0) = X_a^0(y), t \in [0, T], y \in [a, b];$$

где U - скорость течения реки, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ - коэффициенты диффузии.

Численное решение модели (5) осуществлялось с помощью явной разностной схемы с шаблоном



с соответствующими начальными

$$L_j^0 = L^0(y_j); (X_c)_j^0 = X_c^0(y_j); (X_a)_j^0 = X_a^0(y_j);$$

и граничными

$$L_0^{k+1} = L_1^{k+1}; L_M^{k+1} = L_{M-1}^{k+1};$$

$$(X_c)_0^{k+1} = (X_c)_1^{k+1}; (X_c)_M^{k+1} = (X_c)_{M-1}^{k+1};$$

$$(X_a)_0^{k+1} = (X_a)_1^{k+1}; (X_a)_M^{k+1} = (X_a)_{M-1}^{k+1}$$

с использованием регулярной сетки $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(y_j, t_k) | y_j = jh, t_k = k\tau, j = 0, M, k = 0, R\}$ с шагами h и τ по пространству и времени соответственно. Исследование устойчивости данной схемы по начальным данным проводилось методом гармоник. Доказано, что она является условно устойчивой:

$$\tau \leq \frac{h^2}{Uh + \Gamma}, \quad (6)$$

где $\Gamma = \max(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$. Разностная задача аппроксимирует дифференциальную (5) с первым порядком относительно τ и h

Решение одномерной задачи осуществлялось с помощью параллельного алгоритма. В данном случае использовалась декомпозиция с наложением [3].

Численная реализация краевой задачи осуществлялась на крупных сетках 1000, 16000, 32000 на кластере СКИФ «Cyberia».

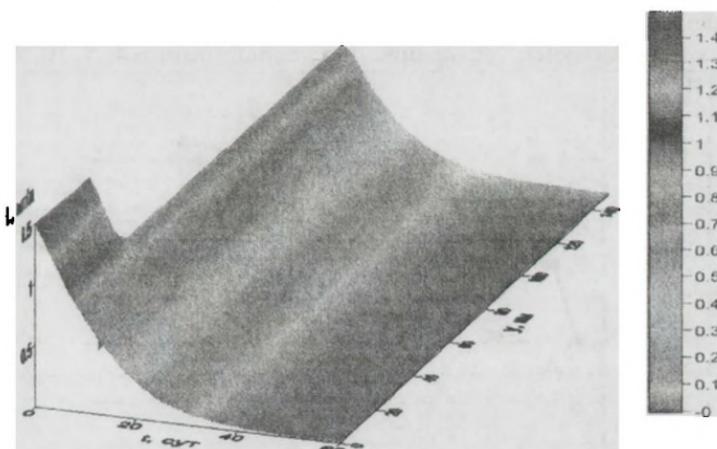


Рисунок 3 – Изменение концентрации L с течением времени по пространству.

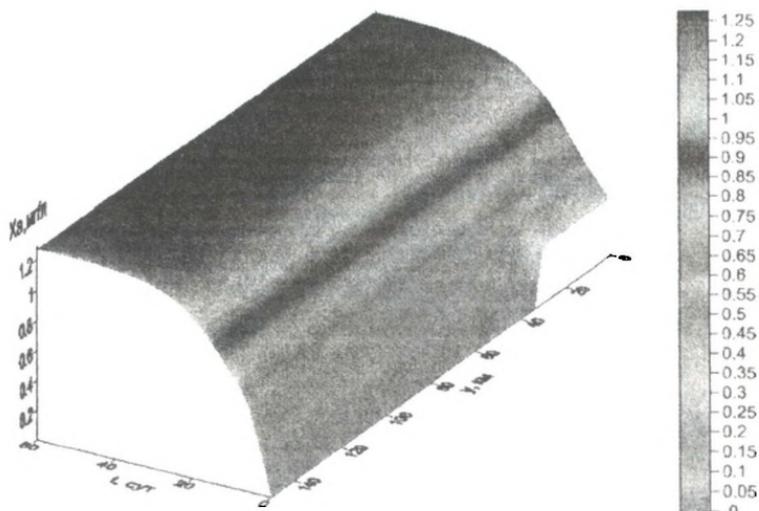


Рисунок 4 – Изменение активной биомассы бактерий X_a с течением времени по пространству.

Результаты расчётов представлены в виде графиков на рис. 3 и 4. Анализ графиков показал, что активная биомасса бактерий и концентрация загрязнений в среде изменяются аналогично тому, как это происходило в точечной модели (рис. 1).

Проведена оценка эффективности и ускорения работы параллельной программы. При реализации алгоритма на большой сетке было получено ускорение при использовании 4, 5, 10, 20 ПЭ.

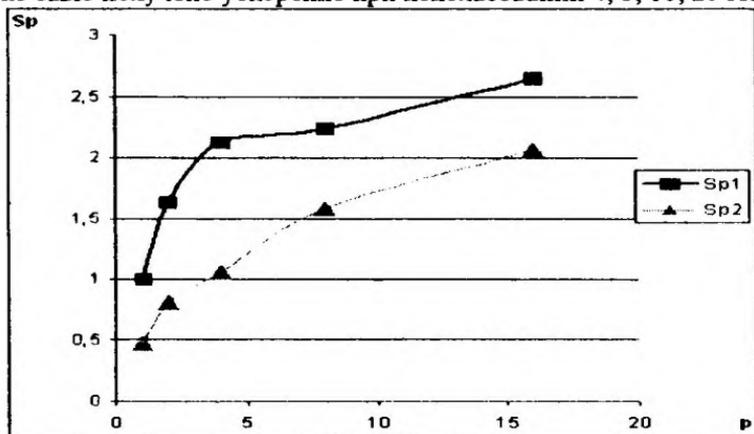


Рисунок 5 – Ускорение работы параллельной программы на сетке 16000 (Sp1) и 32000 узлов (Sp2).

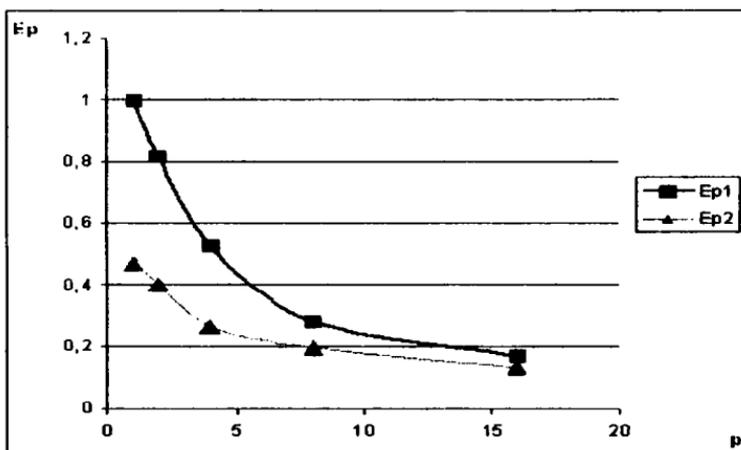


Рисунок 6 – Эффективность работы параллельной программы на сетке 16000 (Er1) и 32000 узлов (Er2).

На рис. 6 показана эффективность работы параллельной программы. Таким образом, предложенный алгоритм является эффективным, применительно к решению задачи самоочистения водной среды, и может быть обобщён на двумерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорожух Е.В., Михайлов М.Д. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на примере моделей типа Моно // Современные проблемы математики и механики: Материалы Всерос. молод. науч. конф. (Томск, 13-15 октября 2010). Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2010. С. 74-76.
2. Вавилин В.А., Васильев В.Б. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод активным илом, М.:Наука, 1979.-118с.
3. Высокопроизводительные вычисления на кластерах: Учебн. пособие/под ред. А.В.Старченко.-Томск: Изд-во Том. Ун-таб 2008.-198 с.

Методы численного интегрирования и их применение к расчету функции пропускания

Бузаев С.С., Родимова О.Б.

Томский государственный университет

Институт оптики атмосферы СО РАН

E-mail: veronic@sibmail.com

Целью настоящей работы является выбор наиболее точного и наименее затратного по времени метода численного интегрирования (исследовались стандартные методы [1] и метод рядов экспонент [2,3]) для расчета функции пропускания CO₂ и его применение для поиска оптимального разбиения спектра CO₂ в ИК диапазоне на интервалы с точностью расчета пропускания не менее 1% для различных оптических путей в случае чистого CO₂ с T=296K и P=1 атм и в случае атмосферы с T=296K, P_{полн}=1 атм, P_{CO₂}=3*10⁻⁴ атм.

Расчет функции пропускания необходим при решении многих задач связанных с распространением излучения в молекулярных средах.

При прохождении излучения $Q_0(\omega)$ через среду толщиной l часть его поглощается средой, а другая часть проходит через среду. Функция пропускания в спектральном интервале $\Delta\omega$ получается как отношение прошедшего излучения к падающему:

$$Q(l) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\kappa(\omega)l} d\omega, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (1)$$

где $\kappa(\omega)$ - коэффициент поглощения, ω - частота излучения.

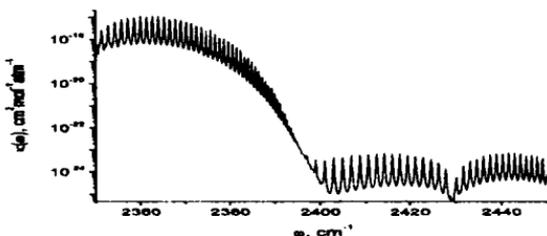


Рисунок 1 – Коэффициент поглощения CO₂ в полосе 4,3 мкм.

Вычисление такого интеграла является технически трудной задачей из-за того, что в подынтегральное выражение входит коэффициент поглощения $\kappa(\omega)$, имеющий сложную зависимость от частоты. На рис. 1 приведен коэффициент поглощения CO_2 в полосе 4,3 мкм. Видно, что он представляет собой немонотонную функцию с многочисленными минимумами и максимумами, обусловленными наличием спектральных линий. Чтобы посчитать такой интеграл с хорошей точностью, нужно задавать малый шаг интегрирования, такой, чтобы на каждую спектральную линию приходилось несколько точек интегрирования. Такой прямой метод расчета называется line-by-line – метод.

В этом случае могут быть применены стандартные методы численного интегрирования. В расчетах использовались интерполяционная квадратурная формула - формула трапеций и формула Гаусса наивысшей алгебраической степени точности.

На рис. 2а приведены результаты расчета функции пропускания CO_2 в интервале $1220\text{-}1420\text{ см}^{-1}$ в зависимости от длины трассы L при $T=296\text{ К}$, $P=1\text{ атм}$ по формуле трапеций с разным числом узлов интегрирования. Каждая точка на кривых отвечает значению функции пропускания Q для определенной длины трассы. Жирная кривая при числе узлов 200000, содержит примерно 250 узлов на спектральную линию. Ее можно считать эталоном. Однако, практически расчет с таким числом узлов интегрирования становится нецелесообразным в радиационных и климатических задачах, так требует больших затрат машинного времени. При малом же числе узлов интегрирования не достигается требуемая точность. Так, из рис.2 видно, что результаты, полученные с небольшим числом узлов (5 и 20) далеки от эталона.

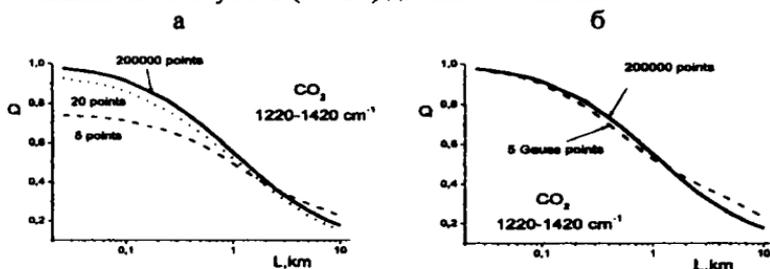


Рисунок 2 – Расчет функции пропускания по формуле трапеций с разным числом узлов интегрирования в зависимости от длины трассы.

Ситуация не улучшается заметно, если для численного интегрирования используется и квадратурная формула наивысшей алгебраической точности - формула Гаусса. На рис. 26 показан соответствующий расчет функции пропускания с 5 гауссовыми точками. В связи с этим в литературе постоянно обсуждаются способы ускорения расчетов в схеме line-by-line.

Наиболее распространенным в настоящее время является так называемый метод k -распределения или метод рядов экспонент. При использовании рядов экспонент подынтегральная функция, имеющая много максимумов и минимумов, преобразуется в монотонную функцию. В ИОА СО РАН [2,3] была предложена версия k -распределения, опирающаяся на теорию рядов Дирихле. Ее главное отличие от имеющихся в литературе заключается в том, что она позволяет получить точные выражения для коэффициентов разложения исследуемых функций в ряды экспонент.

Приведем основные формулы метода рядов экспонент.

Функция пропускания (1) может быть представлена в виде

$$Q(l) = \int_0^1 dg e^{-ls(g)}, \quad (2)$$

который получается из (1) с помощью замен переменных. При этом для функции

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dx}{x} Q(x) e^{sx}, \quad s(g) = g^{-1}(s) \quad (3)$$

может быть получено точное выражение [2,3]

$$g(s) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\kappa(\omega) < s, \omega \in [\omega_1, \omega_2]} d\omega \quad (4)$$

В результате такого преобразования вместо немонотонной функции - коэффициента поглощения получаем монотонную функцию $s(g)$.

Интеграл от монотонной функции может быть теперь взят стандартными методами, например с помощью квадратуры Гаусса-Лежандра, что, собственно, и приводит нас к ряду экспонент

$$Q(l) = \sum_{\nu} b_{\nu} e^{-ls(g_{\nu})}, \quad (5)$$

где b_ν и g_ν - коэффициенты разложения, в нашем случае ординаты и абсциссы квадратуры Гаусса-Лежандра. В нашем случае для вычисления $s(g)$ используются аналитические выражения (4).

Рисунок 3 поясняет процесс вычисления $g(s)$.

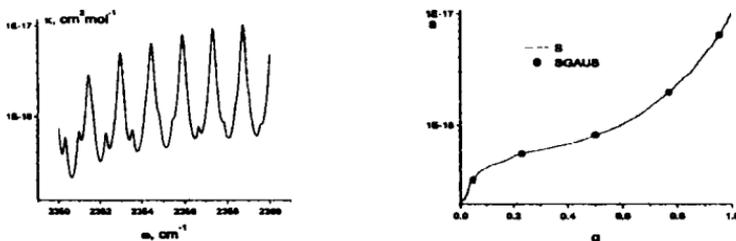


Рисунок 3 – Интервал 2350-2360 cm^{-1} в спектре CO_2 . Коэффициент поглощения $\kappa(\omega)$ (слева) и функция $s(g)$, обратная к $g(s)$ (справа).

На рис.4 приведены результаты расчета функции пропускания CO_2 в интервале 1220-1420 cm^{-1} в зависимости от длины трассы при $T=296 \text{ K}$, $P=1 \text{ атм}$ по формуле Гаусса и с использованием ряда экспонент с 5 узлами интегрирования в сравнении с эталонными значениями.

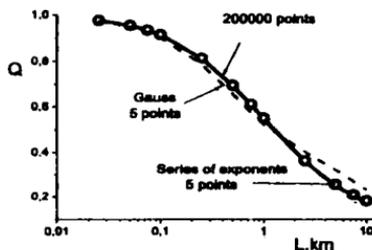


Рисунок 4 – Расчет функции пропускания в зависимости от длины трассы по формуле Гаусса и с использованием ряда экспонент с 5 узлами интегрирования

Итак, сравнение результатов, полученных в рамках стандартных методов интегрирования и при использовании метода рядов экспонент показывает, что метод рядов экспонент при небольшом числе членов ряда дает гораздо большую точность при малом времени счета.

Далее с помощью программы, реализующей описанный выше метод рядов экспонент, был рассмотрен спектр молекулы

углекислого газа CO_2 , являющегося малой примесью в атмосфере. Требовалось найти оптимальное разбиение спектра CO_2 в ИК диапазоне на интервалы с точностью расчета пропускания не менее 1% для разных оптических путей. Оптимальное разбиение этого спектра на интервалы означает требование, чтобы число интервалов было как можно меньшим, но при этом внутри каждого интервала достигалась заданная точность.

Было произведено разбиение спектра CO_2 на требуемые интервалы для двух случаев: при $T=296 \text{ K}$, $P=1 \text{ атм.}$ и при $P_{\text{tot}}=1 \text{ атм.}$, $P_{\text{CO}_2}=3 \cdot 10^{-4} P_{\text{tot}}$, $T=296 \text{ K}$

На рис.5 показано разбиение спектра CO_2 на требуемые интервалы для условий, близким к атмосферным. Можно видеть, что необходимая точность при применении простого метода рядов экспонент достигается везде, кроме центральных участков двух сильных полос.

Таким образом, показано, что метод рядов экспонент является наиболее приемлемым для расчета радиационных величин как по точности, так и по скорости расчета. Применение метода к исследованию спектра CO_2 показало, что достигаемая с его помощью точность составляет менее 1% практически во всем ИК диапазоне.

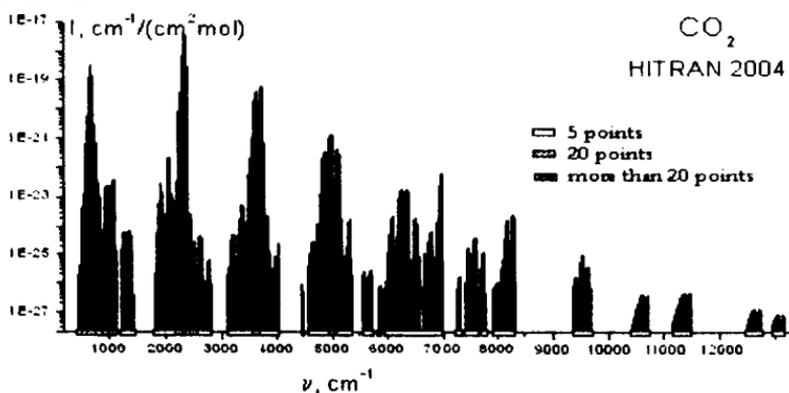


Рисунок 5 – Разбиение спектра CO_2 на интервалы при $T=296 \text{ K}$, $P_{\text{atm}}=1 \text{ атм.}$, $P_{\text{CO}_2}=3 \cdot 10^{-4} \text{ атм.}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н.Калиткин. М.: Наука, 1978 - 508 с.
2. Творогов С.Д. - Оптика атмосферы и океана. - 1994. -Т.7. - N3. - с.315-326.
3. Tvorogov S.D., Nesmelova L.I., Rodimova O.B. - JQSRT. - 2000. - V.66. - p.243-262.

Численное моделирование процессов самоочищения реки Томь с учетом характеристик течения

Громова В.В., Михайлов М.Д.
Томский государственный университет
E-mail: voron_4@list.ru

Состояние воды в реках зависит от множества факторов. Рассматривается влияние химических факторов на процесс самоочищения.

Объектом исследований является участок реки Томь длиной 100 км от пригорода Томска до устья. Существенное влияние на качество воды в реке оказывают промышленные отходы нефтегазодобывающей, лесной, нефтехимической промышленности и машиностроения, а также сточные воды Томска и Северска. Исходя из этого, для исследования была выбрана классическая модель самоочищения Стритера-Фелпса, оценивающая самоочищение реки от органических отходов через концентрации растворенного в воде кислорода. Добавив в систему уравнений, описывающую данную модель, переменные, отражающие реальное состояние водоема (ионы аммонийного, нитратного, нитритного азота, нитрифицирующие бактерии), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -k_1 L^2, \\ \frac{dN_1}{dt} &= -\frac{\mu_1}{\gamma_1} \frac{N_1}{Ks_1 + N_1} X_1 - k_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\frac{\mu_1}{\gamma_1} \frac{N_1}{Ks_1 + N_1} X_1 - \frac{\mu_2}{\gamma_2} \frac{N_2}{Ks_2 + N_2} X_2 - k_1 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= -\frac{\mu_2}{\gamma_2} \frac{N_2}{Ks_2 + N_2} X_2, \\ \frac{dX_1}{dt} &= -\mu_1 \frac{N_1}{Ks_1 + N_1} X_1 - Kd_1 X_1, \\ \frac{dX_2}{dt} &= -\mu_2 \frac{N_2}{Ks_2 + N_2} X_2 - Kd_2 X_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{dD}{dt} = k_1(L^2 + N_1 + N_2) + \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 - Kd_1 X_1 - Kd_2 X_2 - k_2 D$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} L(0) &= L_0, N_1(0) = N_{10}, N_2(0) = N_{20}, N_3(0) = N_{30}, \\ X_1(0) &= X_{10}, X_2(0) = X_{20}, D(0) = D_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для составления двумерной пространственной модели процесса самоочищения, введем операторы конвекции и диффузии, описывающие процессы переноса органического вещества потоком и наличие в жидкости внутримолекулярного переноса:

$$\Delta_k = \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Delta_d = D_L \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{U} &= \bar{f}, \\ \bar{U} &= (L, N_1, N_2, N_3, X_1, X_2, D)^T, \\ \Lambda \bar{U} &= \begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - D_L \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right), \\ \bar{U}(x, t_0), a_1 < x \leq z_1, a_2 \leq y \leq z_2, \\ \bar{U}(x, y, t_0), z_1 < x \leq b_1, z_2 \leq y \leq b_2, \\ \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{x=a_1} = \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|_{y=a_2}, \\ \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right|_{x=b_1} = \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|_{y=b_2}, \end{cases} \quad \bar{f} = \begin{cases} f_i, i = \overline{1, 7}, \\ \bar{U}_0, \\ \bar{U}_1, \\ \bar{0}, \\ \bar{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \bar{G}, \bar{G} = \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}, t \in (0, T].$$

Построим соответствующую разностную задачу:

$$\Lambda_h \bar{U}^{(h)} = \bar{f}^{(h)},$$

$$\bar{U}^{(h)} = (L^{(h)}, N_1^{(h)}, N_2^{(h)}, N_3^{(h)}, X_1^{(h)}, X_2^{(h)}, D^{(h)})^T,$$

$$\Lambda_h \bar{U}^{(h)} = \begin{cases} \frac{\bar{U}_{j,k}^{n+1} - \bar{U}_{j,k}^n}{\tau} + v \left(\frac{\bar{U}_{j+1,k}^{n+1} - \bar{U}_{j-1,k}^{n+1}}{2h_1} + \frac{\bar{U}_{j+1,k+1}^{n+1} - \bar{U}_{j-1,k-1}^{n+1}}{2h_2} \right) - \\ - D_L \left(\frac{\bar{U}_{j+1,k}^{n+1} - 2\bar{U}_{j,k}^{n+1} + \bar{U}_{j-1,k}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{\bar{U}_{j,k+1}^{n+1} - 2\bar{U}_{j,k}^{n+1} + \bar{U}_{j,k-1}^{n+1}}{h_2^2} \right), \\ j = \overline{1, Nx-1}, k = \overline{1, Ny-1}, n = \overline{0, M-1}, \\ \bar{U}_{j,k}^0, j = \overline{0, 2}, k = \overline{0, 2}, \\ \bar{U}_{j,k}^0, j = \overline{3, Nx}, k = \overline{3, Ny}, \\ \bar{U}_{j,0}^{n+1} - \bar{U}_{j,1}^n, j = \overline{0, Nx}, n = \overline{0, M-1}, \\ \bar{U}_{0,k}^{n+1} - \bar{U}_{1,k}^n, k = \overline{0, Ny}, \\ \bar{U}_{j, Ny}^{n+1} - \bar{U}_{j, Ny-1}^n, j = \overline{0, Nx}, \\ \bar{U}_{Nx,k}^{n+1} - \bar{U}_{Nx-1,k}^n, k = \overline{0, Ny-1}, \end{cases} \quad \bar{f}^{(h)} = \begin{cases} \bar{f}, \\ \bar{U}_1, \\ \bar{U}_1, \\ 0, \\ 0, \\ 0, \\ 0. \end{cases}$$

где

$$\bar{U}_0 = (L_0, N_{10}, N_{20}, N_{30}, X_{10}, X_{20}, D_0)^T,$$

$$\bar{U}_1 = (0, N_{10}, N_{20}, N_{30}, X_{10}, X_{20}, D_0)^T.$$

Для численной реализации двумерного разностного метода будем использовать экономичную схему продольно - поперечной прогонки, обладающую свойствами безусловной устойчивости и экономичности[1]. Таким образом, решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Исходя из физических характеристик реки Томь [2], был сделан вывод о том, что спуск сточных вод может быть разрешен только при условии дополнительной очистки от органических веществ.

Рассмотрим очистку с помощью высоконагружаемых биофильтров, наиболее подходящих для реки Томь по свойствам. Как правило, такие биофильтры применяют для очистки бытовых сточных вод при наличии местного загрузочного материала. Значение константы скорости разложения органического вещества в биофильтре

$$k = 10 \cdot \alpha \cdot \beta,$$

вычисляется по формуле: $\Phi_2 = \frac{H \cdot V_{\text{в}}^{0.6} \cdot k_1}{q}$, где k_1 - коэффициент

разложения органического вещества при самоочищении, α, β - постоянные коэффициенты, H - высота слоя загрузочного материала, $V_{\text{в}}$ - расход подаваемого воздуха, q - гидравлическая нагрузка. Добавляя в построенную модель слагаемые, описывающие процесс очистки в биофильтре, получим обобщенную модель.

Расчеты велись на участке реки длиной 100 км, шириной 0.8 км, с шагами по пространственным переменным: по $x - h_1 = 10 \text{ км}$, по $y - h_2 = 0,08 \text{ км}$, по времени $\tau = 0,01 \text{ сут}$

В качестве органических веществ рассматривались фенол и нефтепродукты (основные загрязнители реки Томь). Результаты численных расчетов представлены в виде графиков. На рисунках представлены графики изменения концентрации органических веществ с течением времени: нефтепродуктов (рис. 1), фенола (рис 2).

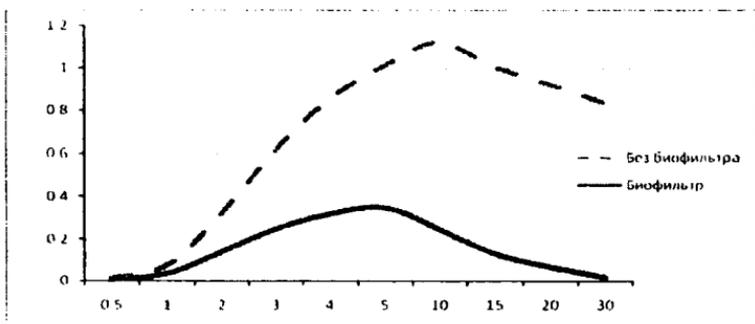


Рисунок 1

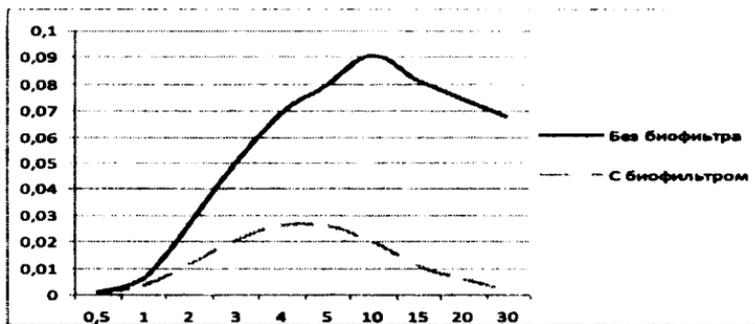


Рисунок 2

В течение первых суток органическое вещество распространяется до середины рассматриваемого участка реки, к 5 суткам загрязнение занимает больший участок (около 90 км), а в последующее время органическое вещество равномерно распределяется по всему участку реки и с течением времени стремится к 0.

Проведенный анализ показывает, что предложенная модификация модели Стритера-Фелпса корректно описывает физические процессы, происходящие при самоочищении реки.

Приведенные данные о химико-биологическом составе воды в Томи относятся к последнему десятилетию и взяты из работ ученых ТПУ Шварцева, Свастеева, Рассказова. Исходя из них, можно говорить о наличии процесса нитрификации в Томи, обусловленного наличием нитрифицирующих бактерий и некоторых видов водорослей.

Численные исследования водных объектов приобретают большую актуальность в силу того, что на их основе можно выяснить, как зависит качество воды и продуктивность водной экосистемы от антропогенных воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громова В.В., Михайлов М.Д. Численное исследование процесса самоочищения загрязненного участка реки//Материалы Всероссийской научной конференции «СПММ». – Томск, 2010, с.60-63.
2. Савичев О.Г., Шварцев С.Л. Качество речных вод и проблемы управления водопользованием в бассейне реки Томи//Вычислительные технологии. – Томск, 2006. Том 11, ч.2
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

Модифицированный попеременно-треугольный метод решения третьей краевой задачи для уравнения эллиптического типа

Гронская А.А., Лаева В.И.

Томский государственный университет

E-mail: amilena@sibmail.com

Одним из эффективных итерационных методов решения разностных уравнений является модифицированный попеременно-треугольный метод [1]-[2]. Этот метод указывает выбор итерационных параметров и дает оценку для числа итераций, причем теория использует минимум информации относительно операторов итерационной схемы. Можно отметить следующие достоинства в рассматриваемом методе: решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в двумерной области сложной формы, а также решение эллиптических уравнений с сильно меняющимися коэффициентами.

Рассмотрим применение модифицированного попеременно-треугольного метода [1,2] для решения третьей краевой задачи уравнения эллиптического типа в прямоугольнике $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = -\varphi(x), \quad x \in G, \quad (1)$$

$$k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \chi_{-\alpha}(x) u - g_{-\alpha}(x), \quad x_\alpha = 0, \quad (2)$$

$$-k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \chi_{+\alpha}(x) u - g_{+\alpha}(x), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad (3)$$

здесь $u(x) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, $k_\alpha(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, $\alpha = 1, 2$.

На прямоугольной сетке

$$\bar{\omega} = \{x_j = (ih_1, jh_2) \in \bar{G}, 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

задаче (1)-(3) соответствует разностная задача

$$\Lambda u = -f(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad f(x) = \varphi(x) + \frac{2}{h_1} \varphi_1(x) + \frac{2}{h_2} \varphi_2(x), \quad (4)$$

где

$$\Lambda_{\alpha} y = \begin{cases} \frac{2}{h_{\alpha}} (a_{\alpha}^{+1} y_{x_{\alpha}} - \chi_{-\alpha} y), & x_{\alpha} = 0, \\ (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, & h_{\alpha} \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ \frac{2}{h_{\alpha}} (-a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}} - \chi_{+\alpha} y), & x_{\alpha} = l_{\alpha}, \end{cases} \quad \varphi_{\alpha}(x) = \begin{cases} g_{-\alpha}(x_{\alpha}), & x_{\alpha} = 0, \\ 0, & h_{\alpha} \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha} - h_{\alpha}, \\ g_{+\alpha}(x_{\alpha}), & x_{\alpha} = l_{\alpha}. \end{cases}$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{\alpha}(x_{\alpha})$ удовлетворяют условиям $0 \leq c_1 \leq a_{\alpha}(x) \leq c_2$, $\alpha = 1, 2$ и имеют конечное число точек, в которых $a_{\alpha\alpha} = O(h_{\alpha}^{-1})$. Также будем считать, что $\chi_{-\alpha}(x_{\beta})$ и $\chi_{+\alpha}(x_{\beta})$ для каждого фиксированного x_{β} одновременно в нуль не обращаются ($\chi_{-\alpha} \geq 0, \chi_{+\alpha} \geq 0, \chi_{-\alpha} + \chi_{+\alpha} > 0$).

Разностную задачу (4) сведем к задаче Дирихле в расширенной области $\bar{\omega}^* = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2), -1 \leq i \leq N_1 + 1, -1 \leq j \leq N_2 + 1\}$, для которой сетка $\bar{\omega}$ является внутренней. Обозначим через γ^* границу сетки $\bar{\omega}^*$ и доопределим сеточную функцию $y(x)$ нулем на γ^* . Если обозначить

$$\bar{a}_{\alpha} = \begin{cases} \rho(x_{\beta}) h_{\alpha} \chi_{-\alpha}(x_{\beta}), & x_{\alpha} = 0 \\ \rho(x_{\beta}) a_{\alpha}(x), & h_{\alpha} \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \\ \rho(x_{\beta}) h_{\alpha} \chi_{+\alpha}(x_{\beta}), & x_{\alpha} = l_{\alpha} + h_{\alpha}, \quad 0 \leq x_{\beta} \leq l_{\beta}, \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \rho(x_1) \rho(x_2) f(x), \quad x \in \bar{\omega},$$

$$\rho(x_{\beta}) = \begin{cases} 0.5, & x_{\beta} = 0, l_{\beta}, \\ 1, & h_{\beta} \leq x_{\beta} \leq l_{\beta} - h_{\beta}, \end{cases} \quad \beta = 3 - \alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

то задача (4) может быть записана в виде

$$\bar{\Lambda} y = \sum_{\alpha=1}^2 (\bar{a}_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} = -\bar{f}(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (5)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma^*.$$

Поэтому для модифицированного попеременно-треугольного метода, примененного к нахождению решения третьей краевой

задачи (4), число итераций зависит от числа узлов так же, как и в случае первой краевой задачи [2]:

$$n \geq \frac{\sqrt[3]{\Delta \ln(2/\varepsilon)}}{2\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим применение модифицированного попеременно-треугольного метода для решения третьей краевой задачи (4) в единичном квадрате. Зададим коэффициенты

$$a_1(x_1, x_2) = 1 + c \left[(x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \right],$$

$$a_2(x_1, x_2) = 1 + c \left[0.5 - (x_1 - 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2 \right], \quad x_1, x_2 \in \bar{\omega}.$$

В неравенствах $0 \leq c_1 \leq a_\alpha(x) \leq c_2$, $\alpha = 1, 2$, имеем $c_1 = 1, c_2 = 1 + 0.5c$. Меняя параметр c , как и в случае первой краевой задачи, будем получать коэффициенты $a_\alpha(x)$ с различными экстремальными свойствами.

В таблице 1 приведено число итераций n и максимальное собственное значение Δ разностного оператора \bar{L} в зависимости от числа узлов $N \times N$ сетки при различных отношениях c_2/c_1 для $\varepsilon = 10^{-5}$. Видно, что для случая больших значений c_2/c_1 в рассмотренном модифицированном попеременно-треугольном методе число итераций существенно увеличивается от этого отношения по сравнению с первой краевой задачей [1,3]. Максимальное собственное значение Δ заметно увеличивается с ростом числа узлов $N \times N$ и при увеличении отношения c_2/c_1 .

Таблица 1 – Зависимость числа итераций от размерности сетки

c_2/c_1	$N \times N = 32 \times 32$		$N \times N = 64 \times 64$		$N \times N = 128 \times 128$	
	n	Δ	N	Δ	n	Δ
2	52	20101,6397	73	81542,0235	104	328438,236
8	94	218930,229	133	899576,316	189	3646512,22
32	177	2812357,17	253	11640355,7	358	47355959,7
128	343	39778676,8	490	165302904	696	673824667
512	675	595545913	964	2480083920	1369	10120161900

В таблице 2 приведена относительная погрешность численного и аналитического решения задачи (1)-(3). Видно, что при фиксированном отношении c_2/c_1 относительная погрешность уменьшается с ростом числа узлов $N \times N$ разностной сетки, что показывает устойчивость численного решения.

Таблица 2 – Относительная погрешность численного и аналитического решения

c_2/c_1	Относительная погрешность, %		
	$N \times N = 32 \times 32$	$N \times N = 64 \times 64$	$N \times N = 128 \times 128$
2	0,015	0,005	0,002
8	0,051	0,013	0,004
32	0,075	0,018	0,005
128	0,085	0,021	0,006
512	0,087	0,022	0,006

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений - М.: Наука, 1978, - 595с.
2. Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Попеременно - треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике. // ЖВМ и МФ, т. 16, № 5, 1976, с.1164-1174.
3. Гроновская А.А. Модифицированный попеременно-треугольный метод решения краевых задач для эллиптических уравнений.// Сборник трудов конференции (Томск, 19 – 23 апреля 2010 г.) – Томск: Томский государственный университет, 2010 г., с. 55-58.

Численное решение систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов

Кошкина А.А.

Томский государственный университет

E-mail: alisakoshkina@yandex.ru

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет большое значение, поскольку к такой проблеме сводится широкий круг сложных практических задач. Вычислительные трудности решения СЛАУ во многом обусловлены заполненностью матриц, приводящей к огромному объему вычислений. Для решения СЛАУ с плотными матрицами традиционно используются точные методы, например, метод исключения Гаусса. Но их вычислительные затраты существенно ограничивают круг решаемых задач даже на высокоскоростных компьютерах

Необходимость решения сложных задач привела к широкому применению итерационных методов [1,2].

Цель работы — разработка оптимального алгоритма для решения систем линейных алгебраических уравнений как с плотными, так и с разреженными матрицами.

Рассмотрим метод сопряженных градиентов для решения системы $Ax = b$. Он является наиболее предпочтительным по быстродействию для симметричных положительно определенных систем. К открытию метода сопряженных градиентов (CG) независимо пришли М.Хестенес и Э.Штифель.

Основной алгоритм метода сопряженных градиентов имеет вид:

1) Выбрать x^0 , положить $p^0 = r^0$, вычислить (r^0, r^0) .

2) Для $k = 0, 1, \dots$

$$a_k = -(r^k, r^k) / (p^k, Ap^k),$$

$$x^{k+1} = x^k - a_k p^k,$$

$$r^{k+1} = r^k + a_k Ap^k.$$

3) Если $\|r^{k+1}\|^2 \geq \varepsilon$, продолжать.

$$\beta_k = (r^{k+1}, r^{k+1}) / (r^k, r^k),$$

$$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta_k p^k.$$

где x — точное решение, x^k — k -е приближение к точному решению, $r^k = b - Ax^k$ — вектор невязки, p^k — вектор направлений, $(x, y) = x^T y$ — скалярное произведение,

$$\|r^k\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (r^k)^2} \text{ — норма вектора.}$$

Теорема (о сопряженных направлениях). Если A вещественная симметрическая положительно определенная матрица $n \times n$, а p^0, \dots, p^{n-1} — ненулевые векторы, удовлетворяющие условию $(p^i)^T Ap^j = 0, i \neq j$, то при любом начальном приближении x^0 итерационные приближения $x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k$, где $\alpha_k = (p^k)^T (Ax^k - b) / (p^k)^T Ap^k$, сходятся к точному решению системы $Ax = b$ не больше чем за n шагов[3].

Теорема гарантирует не только сходимость итераций, но и то, что в отсутствие ошибок округления для сходимости требуется конечное число итераций, не превосходящее n .

Скорость сходимости метода сопряженных градиентов существенно зависит от значения числа обусловленности матрицы A . Для ускорения сходимости итераций применяется предобуславливание матрицы A , которое происходит с помощью преобразования конгруэнтности

$\hat{A} = SAS^T$, где S – невырожденная матрица, выбранная таким образом, что $cond(\hat{A}) < cond(A)$.

Этот подход основан на использовании симметричной положительно определенной матрицы M , аппроксимирующей матрицу A , и матрица S фигурирует лишь неявным образом в соответствии с формулой $(S^T S)^{-1} = M$. Поскольку обычно известна матрица M , но не M^{-1} , вспомогательный вектор \tilde{r} находится путем решения линейной системы $M\tilde{r} = r$. Сформулируем предобусловленный метод сопряженных градиентов PCG:

1. Выбрать x^0 , положить $r^0 = b - Ax^0$.
2. Решить систему $M\tilde{r}^0 = r^0$; положить $p^0 = \tilde{r}^0$.
3. Для $k = 0, 1, \dots$

$$a_k = -(\tilde{r}^k, r^k) / (p^k, Ap^k),$$

$$x^{k+1} = x^k - a_k p^k,$$
4. $r^{k+1} = r^k + a_k Ap^k$.
5. Проверить сходимость итераций; решить систему

$$M\tilde{r}^{k+1} = r^{k+1}.$$

$$\beta_k = (\tilde{r}^{k+1}, r^{k+1}) / (\tilde{r}^k, r^k).$$

$$p^{k+1} = \tilde{r}^{k+1} + \beta_k p^k.$$

В данной работе в среде Delphi реализуется решение поставленной задачи с помощью предобусловленного метода сопряженных градиентов с применением неполной факторизации Холесского, Зейделя и Якоби для плотнозаполненной симметричной положительно определенной матрицы размерности $n \times n$ при $n=1000$ и разреженной матрицы.

$$\left\{ \begin{array}{l} nx_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n - 1, \\ x_1 + nx_2 + \dots + x_n = 2n - 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + nx_n = 2n - 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \dots \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1 \end{array} \right.$$

Первая система характеризуется числом обусловленности

$\mu = \text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = 3$, а вторая – $\mu = 5 \times 10^5$, т.е. является

плохообусловленной.

При численном решении рассмотренных задач использовался компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium(R) Dual-Core CPU 2.20 GHz, 64-разрядная операционная система.

Для примера 1 работа программ, основанных на применении метода сопряженных градиентов, в том числе и предобусловленного метода, закончилась на 1-й итерации за 1 сек (см. Табл.). Для примера 2 ниже приведены графики сходимости норм векторов невязок для каждого метода (см. Рис.). По горизонтальной оси показано количество итераций, а по вертикальной оси – норма вектора невязки.

Таблица. Длительность работы программ для примеров 1 и 2, с

Число обусловленности	Метод сопряженных градиентов	Предобусловленный метод сопряженных градиентов		
		Неполная факторизация Холецкого	Метод Якоби	Метод Зейделя
3	1	1	2	1
500000	15	1	232	46

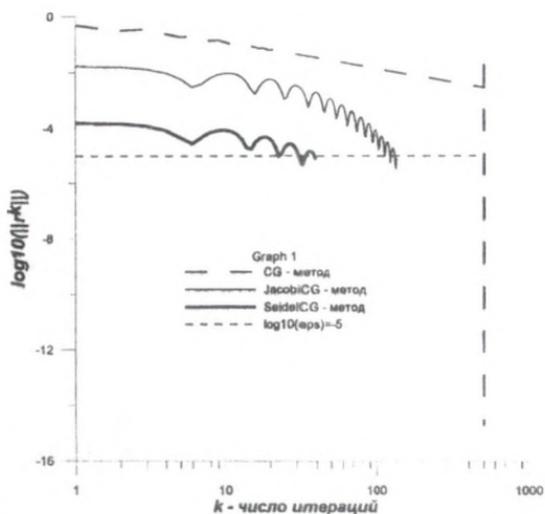


Рисунок – Сходимость итераций для предобусловленного метода сопряженных градиентов PCG.

На основе результатов, полученных при реализации различных методов, можно сделать вывод о том, что эффективным методом для хорошо обусловленной СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей является метод сопряженных градиентов. А для плохо обусловленной СЛАУ с диагональным преобладанием оптимальным является предобусловленный метод сопряженных градиентов с использованием неполной факторизации Холесского, значительно сокращающий время работы программы и объем вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем / В. П. Ильин. – М. : Физматлит, 1995. – 288 с.
2. Меркулова Н. Н. Методы вычислений / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов : учеб. пособие. – Томск : Том. гос. ун-т, 2005. – 257 с.
3. Ортега Дж. Введение в параллельные векторные методы решения линейных систем : пер. с англ. / Дж. Ортега. – М. : Мир, 1991. – 367 с.

Построение эрмитового кубического сплайна на основе базисных функций

Косова О.Н., Каминская Е.В.

Томский государственный университет

Email: kosova-olga_89@mail.ru

Большинство численных методов решения задач математического анализа так или иначе связано с аппроксимацией функций. Это и задачи приближения функций (интерполяция, сглаживание, наилучшие приближения), и задачи, в которых аппроксимация присутствует как промежуточный этап исследования (численное дифференцирование и интегрирование, численное решение дифференциальных и интегральных уравнений).

Хотя согласно теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть как угодно хорошо приближена многочленами, практические возможности применения классического аппарата приближения функций многочленами ограничены [1-2]. Сейчас развивается новая область теории приближения функций и численного анализа – сплайн-функции, которые, получив распространение главным образом как средство интерполяции сложных кривых, стали важным методом для решения разнообразных задач вычислительной математики.

Рассмотрим построение базисного сплайна из полиномов общего вида с непрерывной первой производной вида

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) B_i(x), \quad (1)$$

где

$B_i(x)$ – линейно независимые базисные функции,

$a_i(x)$ – числовые коэффициенты,

n – четное число.

Сплайн с такими свойствами называют эрмитовым.

Для решения интерполяционной задачи на сетке узлов

$$\omega : a = x_0 < \dots < x_m = b, h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, m}, m = n/2$$

необходимо решить линейную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} S_n(x_i) = f(x_i), \\ S'_n(x_i) = f'(x_i), i = \overline{0, m-1}, m = n/2, \end{cases} \quad (2)$$

где $f(x_i)$ и $f'(x_i)$ – значения функции и ее производной в узлах.

Пусть $B_i(x) = x^i, B'_i(x) = ix^{i-1}$. Для кубического полинома имеем $m=2, n=4$. Тогда сплайн запишется в виде:

$$S_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (3)$$

А система интерполяционных уравнений (2) в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Теорема. Система

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = f(x_2) \\ \dots \\ a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \dots + a_{n-1}x_m^{n-1} = f(x_m) \\ a_1 + 2a_2x_1 + \dots + (n-1)a_{n-1}x_1^{n-2} = f'(x_1) \\ a_1 + 2a_2x_2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x_2^{n-2} = f'(x_2) \\ \dots \\ a_1 + 2a_2x_m + \dots + (n-1)a_{n-1}x_m^{n-2} = f'(x_m) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Согласно теореме (4) однозначно разрешима. Найдя решение системы (4), подставив его в (3) и проведя ряд преобразований, получим сплайн вида (5):

$$S'_4(x) = \tilde{X}_0^{i-1}(x)f(x_{i-1}) + \tilde{X}_1^i(x)f(x_i) + \tilde{\tilde{X}}_0^{i-1}(x)f'(x_{i-1}) + \tilde{\tilde{X}}_1^i(x)f'(x_i),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0^{i-1}(x) &= \frac{-(x-x_i)^2(2x-3x_{i-1}+x_i)}{(x_{i-1}-x_i)^3}, \\ \tilde{X}_1^i(x) &= \frac{(x-x_{i-1})^2(2x+x_{i-1}-3x_i)}{(x_{i-1}-x_i)^3}, \\ \tilde{\tilde{X}}_0^{i-1}(x) &= \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{(x_{i-1}-x_i)^2}, \\ \tilde{\tilde{X}}_1^i(x) &= \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_i)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

– базисные функции эрмитового кубического сплайна, вид которых представлен на рисунке 1.

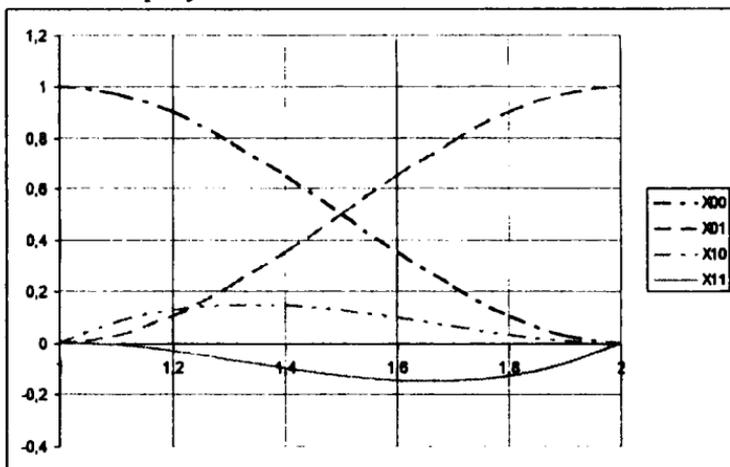


Рисунок 1 – Базисные функции эрмитового кубического сплайна на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$.

Рассмотрим случай, когда нам известны только значения функции в узлах, а значения производной рассчитываются по формулам центральных разностей вида:

$$f'_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}\right) \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \quad (7)$$

$$f'_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} + \left(1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}. \quad (8)$$

Проведя ряд преобразований, перепишем сплайн в виде:

$$S_4(x) = W1(x)f_{i-1} + W2(x)f_i + W3(x)f_{i+1} + W4(x)f_{i+2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} W1(x) &= -\frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{2h^3}, \\ W2(x) &= \frac{2(x-x_2)^2(2x-3x_1+x_2) + (x-x_1)(x-x_2)}{2h^3}, \\ W3(x) &= \frac{-2(x-x_1)^2(2x+x_1-3x_2) + (x-x_1)(x-x_2)^2}{2h^3}, \\ W4(x) &= \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{2h^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

В данном случае базисные функции, представленные на рисунке 2, записываются в виде (10).

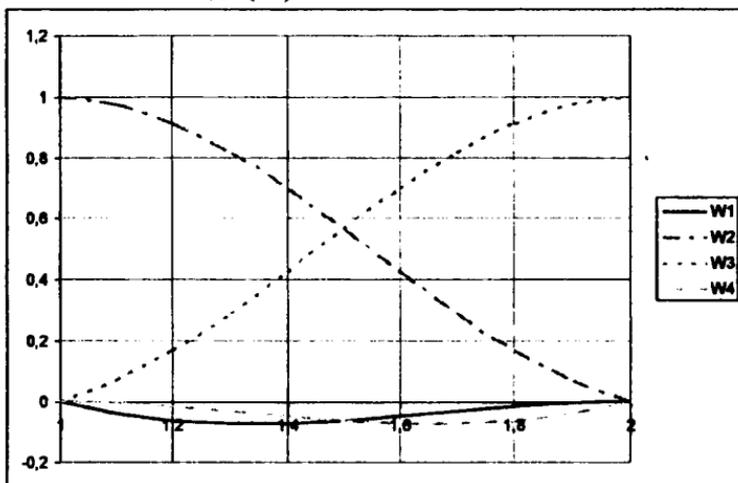


Рисунок 2 – Базисные функции эрмитового кубического сплайна на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$.

Общая формула эрмитового кубического сплайна может быть записана в виде:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(x) f(x_i), \quad (11)$$

где

$$W_i(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1}; \\ W1(x), & x_{i-1} < x \leq x_i; \\ W2(x), & x_i < x \leq x_{i+1}; \\ W3(x), & x_{i+1} < x \leq x_{i+2}; \\ W4(x), & x_{i+2} < x \leq x_{i+3}; \\ 0, & x > x_{i+3}. \end{cases}$$

Вид данного сплайна вместе с фрагментами соседних базисных сплайнов, смещенных на ширину фрагментов, представлен на рисунке 3.

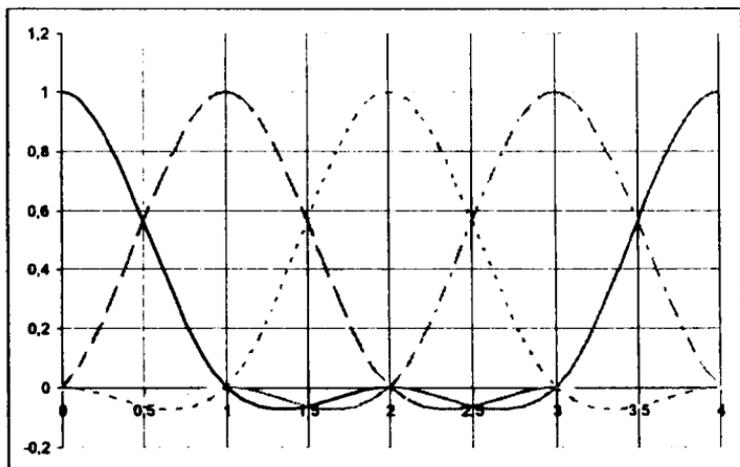


Рисунок 3 – Вид базисных функций эрмитового кубического сплайна вместе с фрагментами соседних функций, смещенных на ширину фрагмента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шелевицкий И.В. Интерполяционные сплайны в задачах цифровой обработки сигналов//Exponenta Pro. – 2003. – №4. – С. 42-53.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций/ Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, под ред. Н. Н. Яненко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Изучение математических моделей вирусного заболевания

Пауль Ю. А., Меркулова Н. Н.
Томский государственный университет
E-mail: paul-julii@yandex.ru

Известно, что математика в настоящее время находит применение не только в традиционных науках, таких как физика, химия, биология, но и в медицине. В литературе рассматриваются различные математические модели иммунологии, описывающие вирусные заболевания. Общая модель вирусного заболевания была создана Г. И. Марчуком совместно со специалистами медиками [1]. Эта модель представляет собой нелинейную систему из восьми уравнений, характеризующих динамику вирусного заболевания.

Основными участниками иммунного процесса являются: F – антитела, V – антигены, T – лимфоциты-киллеры, Λ – макрофаги, C_B , C_T – плазменные клетки, B лимфоциты, а так же m масса пораженного органа.

Модель имеет два частных случая: 1) защита организма ведется только за счет лимфоцитов-киллеров, антитела не вырабатываются (модель M_0); 2) защита организма производится за счет антител (модель M_1). Модель M_0 изучается в [2].

Остановимся на исследовании модели M_1 [3]:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta - \gamma_1 F)V; \\ \frac{dF}{dt} &= \mu_B \xi(m) C_B(t) - \eta_1 \gamma_1 FV - \alpha_F F; \\ \frac{dC_B}{dt} &= P_B(t - \tau) - \alpha_{C_B} (C_B - C_B^*); \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \alpha_m m,\end{aligned}$$

где $P_B(t) = \bar{\gamma} VT$, $\bar{\gamma}_B = \gamma_B \bar{\Lambda} \bar{T} = const$, $V = V^0$, $F = F^0$, $C_B = C_B^0$, $m = 0$ при $t = 0$.

Отметим, что образование плазменных B – клеток в этом случае происходит в результате прямого взаимодействия T – лимфоцитов с антигенами. Тогда число T – лимфоцитов в организме можно считать постоянным. Обозначим их концентрацию через \bar{T} . Аналогично будем считать постоянным и число макрофагов $\bar{\Lambda}$. Параметры модели, отвечающие за воспроизводство, старение и вывод из организма участников иммунного процесса в дальнейшем определяются системой неравенств.

Для упрощения вычислений модель M_1 была приведена к безразмерному виду путем ввода масштабных множителей:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau_2} &= (h_1 - h_2 f)v; \\ \frac{df}{d\tau_2} &= c - f(v + h_3); \\ \frac{df}{d\tau_2} &= h_4 v f - h_5 (c - 1); \\ \frac{dm}{d\tau_2} &= v - h_6 m. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $h_1 = \frac{\beta}{\mu_f}$; $h_2 = \frac{\gamma_1 C_B^*}{\mu_f^2}$; $h_3 = \frac{\alpha_F}{\mu_f}$; $h_4 = \frac{\bar{\gamma}_B \mu_B}{\eta_1 \gamma_1 \mu_f}$; $h_5 = \frac{\alpha_{C_B}}{\mu_f}$;

$h_6 = \frac{\alpha_m}{\mu_f}$ являются безразмерными коэффициентами.

Найдем стационарные решения системы (1). Предположим независимость функций v , f , c , m от времени. В результате приходим к системе нелинейных уравнений, которая имеет несколько решений.

I стационарное решение: $v = 0$; $f = \frac{1}{h_3}$; $c = 1$; $m = 0$.

II стационарное решение:
$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{h_5 (h_1 h_3 - h_2)}{h_1 (h_4 - h_5)}; \\ f &= \frac{h_1}{h_2}; \\ c &= \frac{h_1 h_3 h_4 - h_2 h_5}{h_2 (h_4 - h_5)}; \\ m &= \frac{h_5 (h_1 h_3 - h_2)}{h_6 h_1 (h_4 - h_5)}. \end{aligned} \right.$$

Для исследования на устойчивость стационарных решений система (1) была линеаризована вблизи положения равновесия.

При проверке на устойчивость первого стационарного решения была доказана следующая теорема: каково бы ни было отличное от нуля начального количества вирусов, проникших в клетки поражаемого органа, болезнь не будет развиваться в том случае,

если иммунологический уровень антител F^* к данному антигену будет удовлетворять неравенству $F^* > \frac{\beta \alpha_f}{\gamma_1 \mu_f}$.

Исследование устойчивости второго стационарного решения даёт следующие ограничения на подбор параметров модели:

$$h_1 h_3 < h_2; \quad h_4 < h_5; \quad h_1 h_3 h_4 < h_2 h_5; \quad h_1 h_4 h_6 < h_1 h_5 h_6.$$

Эти неравенства далее используются при численном решении.

Численное решение проводилось одношаговыми методами Эйлера и Рунге-Кутты и многошаговым методом Гира [4]. Особое внимание обратим на чисто неявный A -устойчивый метод Гира II порядка точности. Решение находилось по следующим формулам:

$$\frac{3}{2} \bar{y}_i - 2\bar{y}_{i-1} + \frac{1}{2} \bar{y}_{i-2} = h \bar{f}(\bar{x}_i, \bar{y}_i),$$

$$\text{где } \bar{y} = \begin{pmatrix} v \\ f \\ c \\ m \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} (h_1 - h_2 y_2) y_1 \\ y_3 - y_2 (y_1 + h_3) \\ h_4 y_1 y_2 - h_5 (y_3 - 1) \\ y_1 - h_6 y_4 \end{pmatrix}.$$

В результате численных экспериментов было получено два случая заболевания: выздоровление и летальный исход.

На рисунках 1, 2 представлен случай выздоровления организма.

Изменение количества антител в организме за рассматриваемый период времени показано на рисунке 1. Начальное количество антител в организме равняется 0.07, с течением времени их количество возросло до 1.53. Следовательно, организм борется с чужеродным антигеном.

На рисунке 2 изображено изменение относительной характеристики массы пораженного органа. В начальный момент времени $m = 0$, затем значения m сначала возрастают до 0,12, а потом убывают до нуля. Таким образом происходит выздоровление организма.

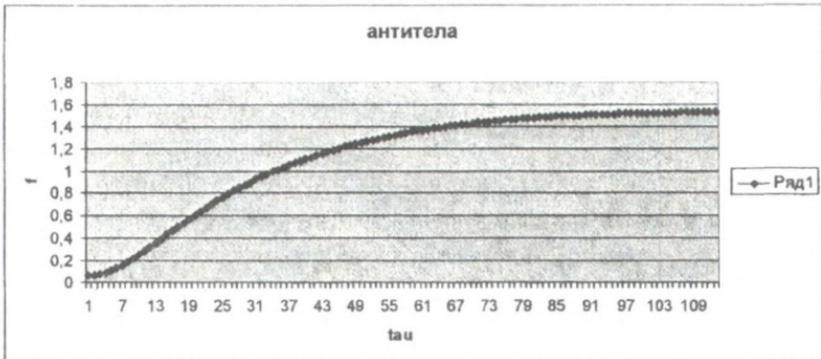


Рисунок 1 – Изменение концентрации антител в организме.

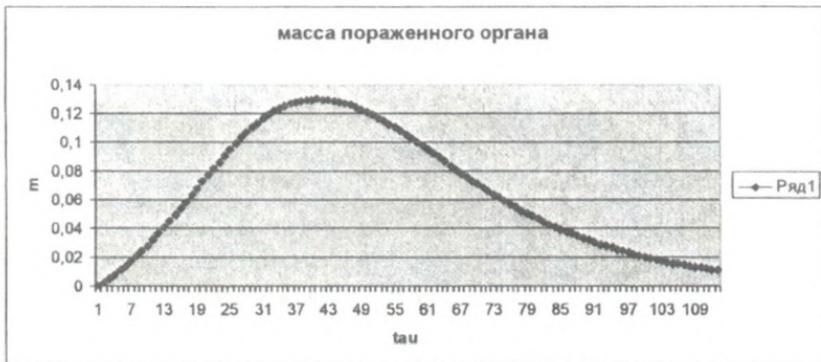


Рисунок 2 – Изменение массы пораженного органа (выздоровление).

На рисунке 3 показано поведение относительной характеристики массы пораженного органа в случае летального исхода заболевания. Количество вырабатываемых организмом антител и макрофагов оказывается недостаточным для борьбы и вывода из организма постоянно накапливающегося антигена, что ведет к увеличению относительной характеристики массы пораженного органа. Если не провести своевременную стимуляцию организма, то избежать летального исхода невозможно, что показано на рисунке 3.

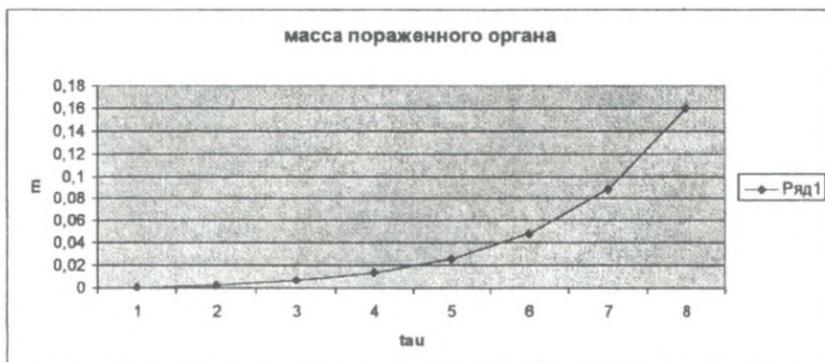


Рисунок 3 – Изменение массы пораженного органа (летальный исход).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1985. – 240с.
2. Современные проблемы математики и механики: Материалы Всероссийской молодежной научной конференции Томского государственного университета (13-15 октября 2010 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – 264 с.
3. Математические модели заболеваний и методы обработки медицинской информации/ ред. Марчук Г. И.- Новосибирск: Наука, 1979. - 380с.
4. Меркулова Н. Н., Михайлов М. Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: ТМЛ – Пресс, 2007. - Ч. II. – 288 с.

Разностная схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа

Тажыйма С.У., Лаева В.И.
Томский государственный университет
E-mail: saisu88@rambler.ru

В данной работе рассматривается построение неявной разностной схемы повышенного порядка точности по пространственным переменным для первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Построенная разностная задача исследуется на аппроксимацию и устойчивость.

Рассмотрим решение разностной задачи для уравнения параболического типа. Пусть требуется найти функцию $u(t, x) \in C_1^2(D) \cap C(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad (1)$$

граничному условию

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = \Psi_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $D = \bar{G} \cup T$, $\bar{G} = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с

границей Γ , $T = [0 \leq t \leq \bar{t}]$, a – коэффициент

температуропроводности ($a > 0$), $f(x, t)$, $\mu(x, t)$, $\Psi_0(x)$ – заданные непрерывные функции.

На разностной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$, с шагами h_1 и h_2 по пространству и τ по времени для задачи (1) – (3) построим неявную разностную схему с первым порядком по времени и четвертым порядком точности по пространственным переменным:

$$y_t = a \Lambda' y^n + \varphi^n, \quad y_t = \frac{y_\theta^n - y_\theta^{n-1}}{\tau}, \quad (4)$$

$$\Lambda' y^n = \Lambda_1 y^n + \Lambda_2 y^n + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y^n, \quad (5)$$

$$y_\theta^0 = \Psi_0(x_{i_1}, x_{j_2}), \quad (6)$$

$$y_\theta^n = \mu(x_{i_1}, x_{j_2}, t_n), \quad (x_{i_1}, x_{j_2}) \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $\Lambda_1 y^n = y_{\bar{x}_1}^n = \frac{y_{m+1}^n - 2y_v^n + y_{i-1}^n}{h_1^2}$, $\Lambda_2 y^n = y_{\bar{x}_2}^n = \frac{y_{r+1}^n - 2y_v^n + y_{r-1}^n}{h_2^2}$,

$$\Lambda_1 \Lambda_2 y^n = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^n, \quad \varphi^n = f^n + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f^n + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f^n,$$

$$y^n \equiv y_\theta^n = u(x_{i_1}, x_{j_2}, t_n), \quad f^n \equiv f(x_{i_1}, x_{j_2}, t_n).$$

Проведем исследование разностной схемы на аппроксимацию и устойчивость. В разностной схеме (4) $a \Lambda' y^n + \varphi^n$ аппроксимируется на шаблоне «ящик»

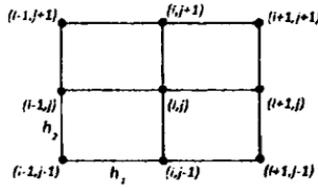


Рисунок 1 – Девятиточечный шаблон разностной схемы.

Разностный оператор $\Lambda_\alpha u$ аппроксимирует дифференциальный оператор $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$ со вторым порядком: $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $\alpha = 1, 2$. В результате оценки погрешности аппроксимации $\Lambda_1 \Lambda_2 u$ получим

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u(x_1, x_2, t_n) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(x_1, x_2, t_n) + O(|h|^2).$$

Тогда

$$a\Lambda'u^n + \varphi^n = aLu^n + f^n - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u^n + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f^n + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f^n + O(|h|^4).$$

Таким образом, разностная схема (5) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + |h|^4)$, $|h|^4 = h_1^4 + h_2^4$, если $u \in C_2^6(G)$, $f \in C^4(G)$.

Для исследования однозначной разрешимости разностной схемы проверим условия принципа максимума [1] для оценки в C решений разностных эллиптических и параболических уравнений. Для вектора погрешности $z = y - u$ запишем задачу

$$z^n = z^{n-1} + \tau a \Lambda' z^n + \tau \psi^n, \quad z = 0 \text{ на } \gamma_h, \quad t \geq 0,$$

где $\psi = O(\tau + |h|^4)$. Видим, что

$$B(x, \tau, \xi) \geq 0 \text{ при } \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}, \quad (8)$$

$$\text{где } B(x, \tau, \xi) = \frac{\tau a}{6} \left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (u_{k+1, j}^n + u_{k-1, j}^n) + \frac{\tau a}{6} \left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (u_{k, j+1}^n + u_{k, j-1}^n) + \\ + \frac{\tau a}{12} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (u_{k-1, j-1}^n + u_{k+1, j-1}^n + u_{k-1, j+1}^n + u_{k+1, j+1}^n).$$

Исследуем устойчивость разностной схемы по начальным данным. Для этого запишем разностную схему (4) в виде:

$$u_{\frac{b}{2}}^n - \tau a \frac{u_{\frac{b}{2},j}^n - 2u_{\frac{b}{2}}^n + u_{\frac{b}{2},j-1}^n}{h_1^2} - \tau a \frac{u_{\frac{b}{2},j}^n - 2u_{\frac{b}{2}}^n + u_{\frac{b}{2},j-1}^n}{h_2^2} - \tau a \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left(u_{\frac{b}{2},j-1}^n - \right. \\ \left. - 2u_{\frac{b}{2},j-1}^n + u_{\frac{b}{2},j-1}^n + 4u_{\frac{b}{2}}^n - 2u_{\frac{b}{2},j}^n + u_{\frac{b}{2},j}^n - 2u_{\frac{b}{2},j}^n - 2u_{\frac{b}{2},j}^n + u_{\frac{b}{2},j+1}^n \right) = u_{\frac{b}{2}}^{n-1} + \tau f_{\frac{b}{2}}^n, \quad (9)$$

Решение $u_{\frac{b}{2}}^n$ запишем в виде двумерной гармоники:

$$u_{\frac{b}{2}}^n = \lambda^n (\alpha, \beta) e^{i(\alpha k + \beta j)}, \text{ где } i - \text{ мнимая единица.}$$

Подставляя это выражение в разностное уравнение (9) при $f_{\frac{b}{2}}^n \equiv 0$, после преобразований получим

$$\lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\tau a}{h_1^2} - \frac{2\tau a}{h_1^2 h_2^2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \left(\frac{\tau a}{h_2^2} - \frac{2\tau a}{h_1^2 h_2^2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \right) \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

По необходимому условию устойчивости фон Неймана [2] ($|\lambda| \leq 1$) наша схема устойчива по начальным данным при выполнении условия (8).

Таким образом, показано, что схема (4) устойчива по начальным данным, имеет первый порядок точности по времени и четвертый порядок точности по пространственным переменным, если $u \in C_2^6(D)$, $f \in C^4(G)$ и выполнено условие (8).

Для решения разностной задачи (4) – (7) на каждом временном слое применим метод неполной редукции, представляющий собой комбинацию методов Фурье и редукции [3].

Рассмотрим решение тестовой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi_2^2}$$

с начальным условием $\bar{t} = 0 : \Theta = 0$ и граничными условиями $\xi_1 = -1 : \Theta = 1$, $\xi_1 = 1 : \Theta = 1$, $\xi_2 = -1 : \Theta = 1$, $\xi_2 = 1 : \Theta = 1$.

Тестовая задача имеет аналитическое решение [4]:

$$\Theta(\bar{t}, \xi_1, \xi_2) = 1 - [1 - F(\bar{t}, \xi_1)][1 - F(\bar{t}, \xi_2)],$$

где $F(\bar{t}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\bar{t}}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2n+1+\xi}{2\sqrt{\bar{t}}} \right) \right], \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$.

В таблице 1 приведены время работы программы и абсолютная погрешность аналитического и численного решений тестовой задачи при различных размерах разностной сетки по пространству $N_1 = N_2 = N$ и шаге по времени $\tau = 0,001$. Из результатов, приведенных в таблице, видно, что с увеличением размера сетки по пространству погрешность уменьшается, что показывает сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Таблица 1 – Время работы программы и абсолютная погрешность численного и аналитического решений для различных размерах сетки по пространству для шага по времени $\tau = 0,001$

Сетка, $N \times N$	Абсолютная погрешность			T, с
	$t=0,3$	$t=0,4$	$t=0,5$	
$N = 8$	$4,72 \times 10^{-3}$	$6,42 \times 10^{-3}$	$5,92 \times 10^{-3}$	$1,77 \times 10^{-2}$
$N = 16$	$2,23 \times 10^{-3}$	$2,46 \times 10^{-3}$	$2,12 \times 10^{-3}$	$4,23 \times 10^{-2}$
$N = 32$	$1,53 \times 10^{-3}$	$1,43 \times 10^{-3}$	$1,16 \times 10^{-3}$	0,153
$N = 64$	$1,34 \times 10^{-3}$	$1,17 \times 10^{-3}$	$9,17 \times 10^{-4}$	0,628

На рисунках 2 и 3 изображены графики аналитического (сплошная линия) и численного (линия с маркерами) решений при шаге по времени $\tau = 0,001$ и шаге по пространству $N_1 = N_2 = 16$ по координате x_1 при $x_2 = 0$ в моменты времени $t = 0,3$ и $t = 0,5$. Приведенные графики показывают хорошее совпадение численного и точного решений при достаточно «грубой» сетке по пространству.

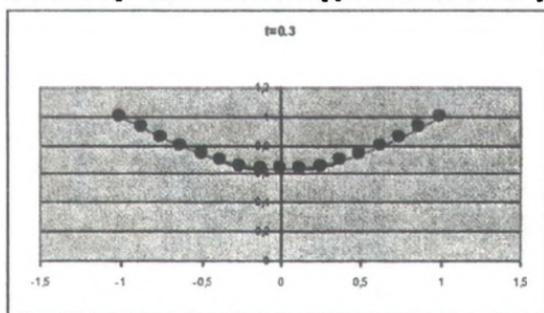


Рисунок 2 – Сравнение аналитического (сплошная линия) и численного (линия с маркерами) решений в момент времени $t=0,3$.

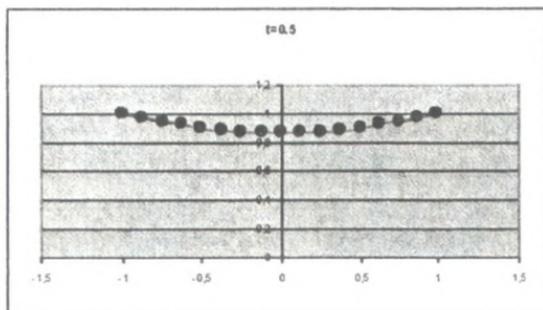


Рисунок 3 – Сравнение аналитического (сплошная линия) и численного (линия с маркерами) решений в момент времени $t=0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1989. – 616с.
2. Годунов С.К. Разностные схемы (введение в теорию) / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – уч. пособие. – М.: Наука, 1977. – 440с. с илл.
3. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592с.: ил.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 600с.

Моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя (КМПУ) на основе электротехнической схемы замещения

Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Герасимов Д.Ю., Васильева О.В.

Томский политехнический университет

E-mail: vasileva.o.v@mail.ru

Работа посвящена построению и исследованию математической модели КМПУ и разработке алгоритма для расчета индуктивности сложной электродной системы в программно-интегрированных средах MATLAB и MathCAD. На рисунке 1 представлена упрощенная модель КМПУ. Ступок представляется как недеформируемая проводящая перемычка. В электротехнической схеме батарея конденсаторов емкостью $C = 30 \cdot 10^{-3} \Phi$ заряжается

до напряжения $U_0 = 3\text{кВ}$ [1]. Сопротивление цепи будем считать равным $R = 10^{-3}\text{Ом}$ [1–2]. Далее необходимо рассчитать два следующих параметра L_0 и $L(t)$.

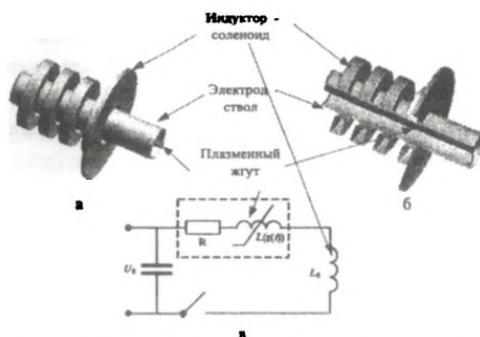


Рисунок 1 – Упрощенная модель КМПУ: а) модель проводящей части плазменного ускорителя; б) сечение плазменного ускорителя; в) электротехническая схема замещения КМПУ.

Для нахождения индуктивности индуктора L_0 воспользовались известным энергетическим определением: $L_0 = 2W_m / I^2$, где I - ток в катушке, W_m - энергия магнитного поля.

В свою очередь, энергию магнитного поля определили:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} j dV$$

где \mathbf{A} - векторный потенциал поля, j - вектор плотности тока, V - объем, занятый токами.

Основное расчетное уравнение:

$$L_0 = \frac{1}{I^2} \int_V \mathbf{A} j dV$$

В качестве апробации алгоритма была взята модель – цилиндрическая катушка с постоянной площадью $S = 100\text{ мм}^2$ и внутренним радиусом $r_1 = 10\text{ мм}$ (рис. 2). Варьировалась высота обмотки $h = r_2 - r_1$.

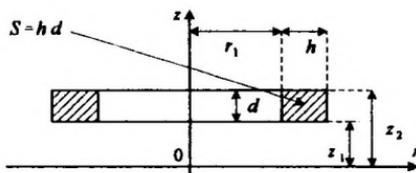


Рисунок 2 – Продольное сечение цилиндрической катушки.

Для получения индуктивности катушки последняя формула свелась к выражению (1):

$$L = \frac{2\pi \cdot 10^9}{S^2} \cdot \int_{r_1}^{r_1+h} \rho' \cdot \left(\int_{z_1}^{z_1+d} A(\rho', z') dz' \right) d\rho', \quad (1)$$

где S - площадь сечения; r_1 - внутренний радиус; h - высота обмотки; d - ширина обмотки; z_1 - нижний предел интегрирования по оси z ; $A(\rho', z')$ - функция распределения векторного потенциала; ρ' - радиус элементарной кольцевой трубки тока; z' - переменная интегрирования вдоль оси z ; $d\rho' dz'$ - сечение элементарной кольцевой трубки тока.

При наличии четырех колец в индукторе в соответствии с рис. 3 и формулой (1):

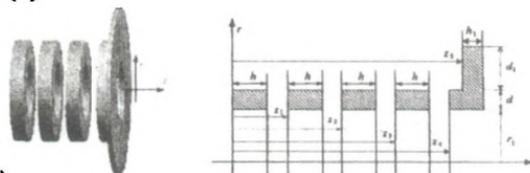


Рисунок 3 – Сечение индуктора.

$$L_0 = \frac{2\pi}{S_1^2} \int_{\eta}^{\eta+d} \rho d\rho \left(\int_0^h dz A(z, \rho) + \int_{z_1}^{z_1+h} dz A(z, \rho) + \int_{z_2}^{z_2+h} dz A(z, \rho) \right) +$$

$$+ \frac{2\pi}{S_1^2} \int_{\eta}^{\eta+d} \rho d\rho \left(\int_{z_3}^{z_3+h} dz A(z, \rho) + \int_{z_4}^{z_4+h} dz A(z, \rho) \right) + \frac{2\pi}{S_2^2} \int_{\eta+d}^{\eta+d+d_1} \rho d\rho \int_{z_5}^{z_5+h_1} dz A(z, \rho)$$

Расчет поля векторного потенциала проведен на основе метода конечных элементов в среде MATLAB.

В результате индуктивность индуктора равна $L_0 = 1,722 \cdot 10^{-7}$ Гн .

Индуктивность коаксиальной системы жгут-электрод $L(z)$ записана в виде линейной функции координаты распространения:

$$L(z) = \frac{z\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = L'z .$$

Постоянный коэффициент L' при координате z называется погонной индуктивностью (индуктивность единицы длины) [2]. После подстановки необходимых величин получена величина погонной индуктивности:

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 2 \cdot 10^{-7} \ln(10) = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн} .$$

Пользуясь электротехнической схемой замещения ускорителя и зная параметры схемы и используя формализм Лагранжа, получены уравнения для электромеханической системы (2).

Система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка решена численно методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом, для повышения точности расчета она предварительно была сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка (3).

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} L - \frac{\partial}{\partial z} L = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L - \frac{\partial}{\partial q} L + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Phi = F(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} L(z) \\ \frac{d}{dt} [iL(z)] - u_c + iR = U_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \frac{i^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} L(z) \\ \frac{d}{dt} i = \frac{-i \frac{\partial L(z)}{\partial z} + U_c - iR + U_0}{L(z)} \\ \frac{d}{dt} U_c = -\frac{i}{C} \end{cases} \rightarrow \frac{d\mathbf{X}}{dt} = D(t, \mathbf{X}) \quad (3)$$

здесь $\mathbf{X} = [x_1 = z(t), x_2 = v(t), x_3 = i(t), x_4 = u_C(t)]^T$ – вектор состояния содержит следующие компоненты (рис. 4): $z(t)$ – координату, $v(t)$ – скорость, $i(t)$ – ток, $u_C(t)$ – напряжение на конденсаторе; m – масса, $L(z) = L_0 + L'z$ – индуктивность, R – сопротивление плазмы, $D(t, \mathbf{X})$ – расширенная матрица.

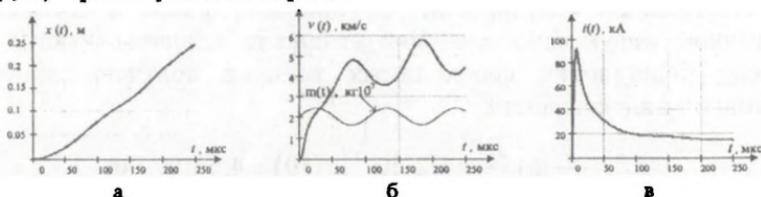


Рисунок 4 – Результаты расчетов при значениях параметров цепи

$C = 12 \cdot 10^{-3} \Phi$, $L_0 = 1,722 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $L' = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $U_0 = 3 \text{ кВ}$: а) координата распространения; б) скорость сгустка, в) ток.

В качестве правильности работы алгоритма расчета проведена проверка баланса энергии рассматриваемой системы (рис. 5).

При электродинамическом ускорении часть энергии

трансформируется в кинетическую энергию: $W_{кин}(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$.

Наличие реактивных элементов L, C обуславливает взаимное преобразование электрической энергии в магнитную энергию и

наоборот: $W_C(t) = \frac{u_C^2(t)C}{2}$, $W_L(t) = \frac{i^2(t)L}{2}$. Даже при незначительных

омических сопротивлениях плазмы порядка $R = 10^{-3} \text{ Ом}$ за счет

больших токов в тепло преобразуется энергия: $W_R(t) = \int_0^t i^2(t)R(t)dt$.

Энергия, обусловленная изменением массы:

$U_{\gamma 0}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t v^2(t) \frac{dm(t)}{dt} dt$. Теперь можно записать баланс энергии

(рис. 5) в виде растрат электростатической энергии заряженного конденсатора:

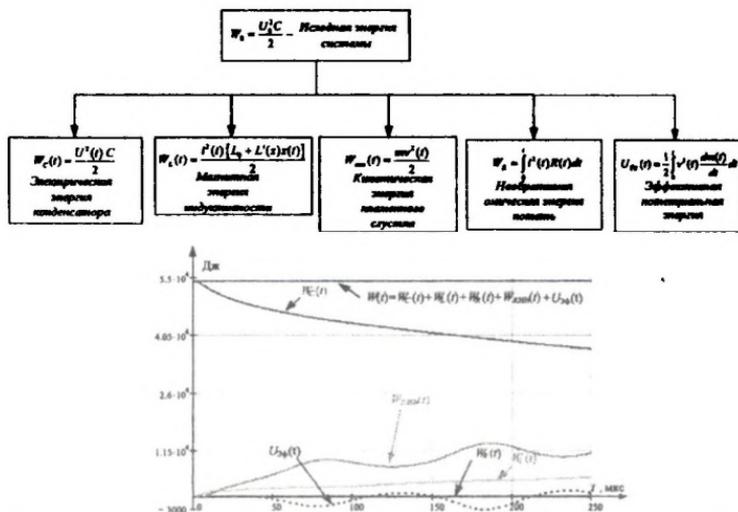


Рисунок 5 – Схема распределения энергии в плазменном ускорителе с учетом эрозии. Расхождения с экспериментальными данными составили около 20 %, что говорит об адекватности разработанной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивков А.А., Герасимов Д.Ю., Цыбина А.С. Электроэрозионная наработка материала в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе для нанесения покрытий // *Электротехника*. – Томск, 2005. – № 6. – С. 25–33.
2. Колесников П.М. *Электродинамическое ускорение плазмы* – М.: Атомиздат, 1971. – 388 с.

Исследование сходимости интерполяционного процесса на адаптивных сетках

Кононенко А. А., Меркулова Н. Н.
Томский государственный университет
E-mail: kaa483@yandex.ru

В последние годы все актуальней становится задача построения адаптивных сеток. Адаптивные сетки находят широкое применение

при решении различных задач математической физики [1-6]. Они позволяют при фиксированном общем числе узлов уменьшить погрешность численного решения за счет более оптимального, по отношению к особенностям решения, расположения узлов сетки.

В работе исследуется равномерная сходимость интерполяционного процесса для заданной функции

$$f(x) = 0.48^2 x^2 + \frac{1}{8}(256 - (x^2 + 0.48^2)^2), \text{ определенной в области}$$

$\bar{G} = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Поведение функции представлено на рисунке 1.

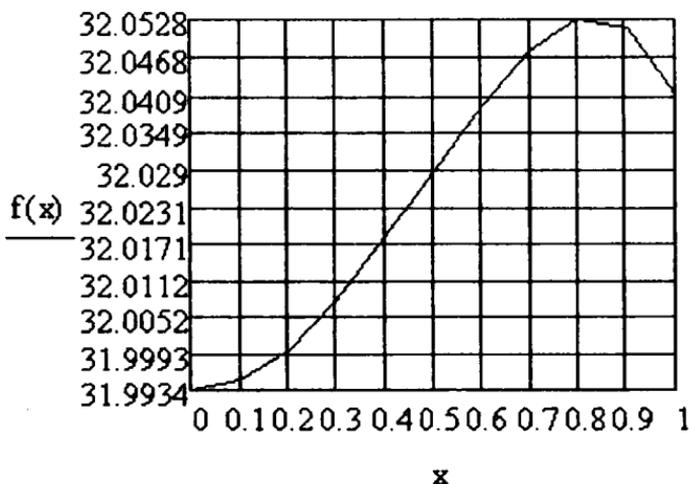


Рисунок 1 – График функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ приближается интерполяционными многочленами Лагранжа $L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, n = \overline{1, 15}$. Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n находятся из условий интерполяции $L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Определение коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n сводится к решению точным методом Гаусса последовательного исключения неизвестных следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0), \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n). \end{cases}$$

В качестве сеточных узлов берутся узлы равномерной и неравномерной сеток, сетки Чебышева и адаптивной сетки. В случае равномерной сетки узлы находятся по правилу:

$$x_i = i \cdot h, i = \overline{0, n}, h = 1/n.$$

Узлы x_i неравномерной сетки определяются по формулам:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_i = i \cdot h + \varepsilon / i, i = \overline{1, n-1}, \varepsilon \in (0, 1), \\ x_n = 1. \end{cases}$$

Для нахождения узлов сетки Чебышева используются формулы [1]:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{(2m+1)\pi}{2n+2} \right), m = \overline{1, n-1}, \\ x_n = 1. \end{cases}$$

В качестве узлов адаптивной сетки рассматриваются узлы сетки, построенной по методу эквираспределения [2]. Идея метода заключается в том, что при конструировании произвольного достаточно гладкого взаимно-однозначного отображения $x(\xi)$ единичного отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[0, 1]$, такого, что $x(0) = 0, x(1) = 1$ нужно добиться выполнения принципа эквираспределения: величина ω равномерно распределена по всем ячейкам неравномерной сетки, а именно

$$h_i \omega_i = C, x_0 = 0, x_n = 1, \omega_i = \omega(x(\xi)), x(\xi) \in h_i, \xi \in (0, 1).$$

Можно избавиться от постоянной C , если продифференцировать первое равенство. В итоге для определения отображения $x(\xi)$ получается краевая задача

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\omega(x) \frac{dx}{d\xi} \right) = 0, \xi \in (0, 1), \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Аппроксимируем данную дифференциальную задачу разностной схемой

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ \frac{1}{h} (\omega(x_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h} - \omega(x_{j-1/2}) \frac{x_j - x_{j-1}}{h}) = 0, j = \overline{1, n-1}, \\ x_n = 1. \end{cases}$$

Приходим к нелинейной разностной задаче для вычисления координат узлов, для решения которой применяется метод итерации относительно узлов сетки.

Весовая функция ω выбирается произвольно. В данной работе в качестве ω рассматриваются функции

$$\begin{aligned} \omega(x_{j+1/2}) &= 1 + \alpha \left| \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} \right|^\beta, \\ \omega(x_{j-1/2}) &= 1 + \alpha \left| \frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right|^\beta, \\ \alpha &= 1, \beta = 1. \end{aligned}$$

В ходе выполнения работы проводился вычислительный эксперимент на компьютере. Для уверенности в правильности вычислений было проведено тестирование написанных программ на функциях $g(x) = x^2$ и $h(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Получено, что для функции $g(x)$ интерполяционный процесс сходится на всех рассмотренных сетках. Для функции $h(x)$ интерполяционный процесс на равномерной сетке расходится. Также было показано, что интерполяционный процесс для функции $h(x)$ на сетке Чебышева сходится.

В результате проведенного вычислительного эксперимента для функции $f(x)$ найдено, что с увеличением степени многочлена Лагранжа увеличивается вычислительная погрешность на всех сетках, но наибольшее значение получается на неравномерной сетке. Далее, для многочленов первой и второй степени результаты одного порядка на всех сетках, а для многочленов 3 – 15 степеней более точное приближение достигнуто на адаптивной сетке и сетке Чебышева. Отметим, что многочлен Лагранжа четвертой степени на всех сетках приближает $h(x)$ наилучшим образом. Для

многочленов Лагранжа 7, 9 степеней наилучшее приближение получено на адаптивной сетке.

Показано, что интерполяционный процесс на всех сетках сходится. График функции погрешности $r_n(x) = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)|, n = \overline{1,15}$ на всех сетках имеет примерно одинаковый характер поведения (рис. 2).

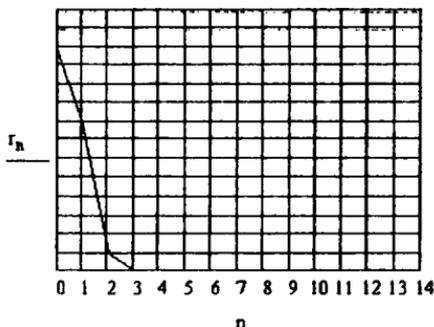


Рисунок 2 – График $r_n(x) = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)|, n = \overline{1,15}$.

Таким образом, в ходе исследований найдено, что по сравнению с равномерной сеткой наилучшее приближение для функции $f(x)$ достигается на адаптивной сетке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулова Н. Н. Методы приближенных вычислений: учеб. пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. – Томск : ТМЛ-Пресс, 2007. – ч. 1. – 267 с.
2. Хакимзянов Г. С. Разностные схемы на адаптивных сетках: учеб. пособие / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин. – Новосибир. : Новосиб. гос. ун-вет., 2005 – ч. 1. – 1-192 с.
3. Методы построения сеток [Электронный ресурс] // Википедия : свободная энцикл. – Электрон. дан. – М., 2007. – URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D1%E5%F2%EA%E0_\(%F0%E0%F1%F7%E5%F2%ED%E0%FF\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D1%E5%F2%EA%E0_(%F0%E0%F1%F7%E5%F2%ED%E0%FF)) (дата обращения 26.02.2011).
4. Лисейкин В. Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1996. – Т. 36, № 1. – С. 3-41.
5. Неструктурированные сетки для задач математической физики (обзор) / Л. В. Кругликова [и др.] // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 3. – С. 93-116.
6. Вариационный метод построения высокоаспектных регулярных адаптивных сеток / К.Л. Богомолов [и др.] // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 5. – С. 11-28.

Применение метода сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией в задачах безусловной оптимизации

Новосельцева О.В., Богословский Н.Н.

Томский государственный университет

E-mail: novoseltseva_olesya@mail.ru, nbogoslovsky@math.tsu.ru

Рассмотрим задачу оптимизации. С математической точки зрения задача конечномерной оптимизации заключается в определении наибольшего или наименьшего значения функции многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на заданном множестве X и точки $x^* \in X$, в которой это значение достигается. Такую задачу называют задачей оптимизации, а функцию $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - целевой функцией.

В работе рассматривается один из эффективных методов решения задачи безусловной конечномерной оптимизации с одним критерием оптимальности, которую можно записать в виде:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n, \quad (1)$$

где $f(x)$ - целевая функция многих переменных, определенная в R^n и дважды непрерывно дифференцируемая.

Метод сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией

Для решения задачи многомерной безусловной минимизации рассмотрим метод сопряженных градиентов с квазиньютоновской аппроксимацией (LS-BFGS метод) [1], который основан на двух подходах: LS методе [1,2] и BFGS-аппроксимации [3].

Рассмотрим задачу безусловной минимизации

$$\min f(x), x \in R^n \quad (2)$$

где f - дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Классические методы сопряженных градиентов решают задачу (2) с помощью последовательности линейных поисков

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, k = 1, 2, \dots,$$

где t_k - длина шага а направление поиска d_k определяется по формуле:

$$d_k = -g_k + \beta_k d_{k-1}, \quad g_k = \nabla f(x_k).$$

В своей работе [4] Лью и Стори предложили модифицированный метод сопряженных градиентов, который в дальнейшем будем называть LS методом. Для того, чтобы учесть неточности линейного поиска, в данном методе направление поиска определяется по формуле:

$$d_k = -\alpha_k g_k + \beta_k d_{k-1}, \quad \alpha_k > 0. \quad (3)$$

Запишем ньютоновскую аппроксимацию для функции $f(x)$ в точке x_{k+1} в окрестности точки x_k :

$$F(x_k + t_k d_k) \approx f(x_k) + (g_k^T d_k) t_k + \frac{1}{2} (d_k^T H_k d_k) t_k^2, \quad k \geq 1,$$

где $H_k = \nabla^2 f(x_k)$ - матрица Гессе функции f в точке x_k . Если H_k - положительно определенная матрица, тогда

$$\min_{t_k > 0} F(x_k + t_k d_k) - f(x_k) \leq F(x_k + d_k) - f(x_k). \quad (4)$$

Для того, чтобы улучшить линейный поиск, Лью и Стори предложили искать коэффициенты α_k, β_k из уравнения (3) такие, что они доставляют минимум правой части неравенства (4), то есть необходимо решить задачу нахождения минимального значения функции

$$\phi(\alpha, \beta) = F(x_k + d_k) - f(x_k) = (g_k^T d_k) t_k + \frac{1}{2} (d_k^T H_k d_k) t_k^2.$$

Решив задачу минимизации этой функции, можно получить следующие аналитические формулы для вычисления коэффициентов α_k и β_k уравнения (3):

$$\alpha_k = \frac{1}{D_k} \left[\|g_k\|^2 v_k - (g_k^T d_{k-1}) w_k \right], \quad (5)$$

$$\beta_k = \frac{1}{D_k} \left[\|g_k\|^2 w_k - (g_k^T d_{k-1}) u_k \right], \quad (6)$$

где

$$u_k = g_k^T H_k g_k, \quad v_k = d_{k-1}^T H_k d_{k-1}, \quad w_k = g_k^T H_k d_{k-1}, \quad (7)$$

$$D_k = u_k v_k - w_k^2 > 0.$$

Лью и Стори в своей работе показали, что модифицированный метод сопряженных градиентов глобально сходится при выполнении условий линейного поиска [2].

Для того, чтобы избежать непосредственного вычисления и хранения H_k , в работе [1] предложено вычислять u_k , v_k и w_k , используя формулу BFGS – аппроксимации и тот факт, что LS метод – это двумерный метод Ньютона [5].

Пусть $Z_{k-1} = \text{span}\{-g_k, d_{k-1}\}$ и $Q_{k-1} = \begin{pmatrix} -g_{k,1} & d_{k-1,1} \\ -g_{k,2} & d_{k-1,2} \\ \vdots & \vdots \\ -g_{k,n} & d_{k-1,n} \end{pmatrix}$. Тогда в

Z_{k-1} матрица Гессе от f и градиент в этой текущей точке выражаются следующими формулами соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k &= Q_{k-1}^T H_k Q_{k-1}, \\ \tilde{g}_k &= Q_{k-1}^T g_k. \end{aligned} \quad (8)$$

Все величины (вектора и матрицы) в пространстве Z_{k-1} будут обозначаться символом \sim . Таким образом, новое направление определяется с помощью следующей формулы:

$$d_k = -(Q_{k-1} \tilde{H}_k^{-1} Q_{k-1}^T) g_k, \quad (9)$$

или это можно записать в следующей форме:

$$d_k = -\alpha_k g_k + \beta_k d_{k-1},$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = -\tilde{H}_k^{-1} \tilde{g}_k. \quad (10)$$

Хью и Стори в работе [5] показали, что возможно заменить исходную матрицу \tilde{H}_k в (9) другой положительно определенной матрицей, поэтому воспользуемся BFGS – формулой для вычислений \tilde{H}_k .

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и $\Delta g_k = g_{k+1} - g_k$ такие, что $\Delta x_k^T \Delta g_k > 0$. Тогда BFGS-формула для вычисления матрицы Гессе в точке x_{k+1} , которая получается как аппроксимация для матрицы Гессе функции f в пространстве Z_k , задается следующим образом:

$$\tilde{H}_{k+1} = U_{BFGS} (\Delta\bar{x}_k, \Delta\bar{g}_k, \bar{H}_k) \quad (11)$$

⇕

$$\tilde{H}_{k+1} = \bar{H}_k + \frac{\Delta\bar{g}_k \Delta\bar{g}_k^T}{\Delta\bar{x}_k^T \Delta\bar{g}_k} - \frac{\bar{H}_k \Delta\bar{x}_k \Delta\bar{x}_k^T \bar{H}_k}{\Delta\bar{x}_k^T \bar{H}_k \Delta\bar{x}_k}. \quad (12)$$

где $\Delta\bar{x}_k = Q_k^T \Delta x_k$, $\Delta\bar{g}_k = Q_k^T \Delta g_k$.

Общая схема для получения матрицы \tilde{H}_{k+1} выглядит следующим образом:

а) $\bar{H}_k = Q_k^T H_k Q_k$, проекция H_k на $Z_k = \text{span}\{-g_{k+1}, d_k\}$.

б) $\Delta\bar{x}_k = Q_k^T \Delta x_k$, $\Delta\bar{g}_k = Q_k^T \Delta g_k$.

в) Если $\Delta\bar{x}_k^T \Delta\bar{g}_k > 0$, то используем BFGS-формулу:

$$\tilde{H}_{k+1} = U_{BFGS} (\Delta\bar{x}_k, \Delta\bar{g}_k, \bar{H}_k).$$

г) Расширим аппроксимацию на все пространство R^n .

Запишем пошагово алгоритм LS-BFGS метода.

0. Задаем начальные значения для x_0 и $d_0 = -g_0$; $k \leftarrow 0$.

Проводим линейный поиск и получаем значение t_0 .

Вычисляем $x_1 = x_0 + t_0 d_0$.

Задаем матрицы Q_0 и \bar{H}_1 : $\bar{H}_1 \leftarrow I_2$.

1. Проверяем условие $\|g_{k+1}\| < \varepsilon$;

если данное условие выполняется, тогда искомое значение равно x_{k+1} ; иначе $k \leftarrow k + 1$.

2. Если выполняется условие $k > m$, тогда переходим к шагу 7.

3. Вычисляем $d_k = -\alpha_k g_k + \beta_k d_{k-1}$.

Проводим линейный поиск и получаем значение t_k .

Вычисляем $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.

Вычисляем $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$; $\Delta g_k = g_{k+1} - g_k$.

4. Если выполняется условие $\sigma_2(g_{k+1}^T \Delta g_k) \leq -\|d_k\|^2$ или

$\sigma_2(g_{k+1}^T \Delta g_k) \geq (1 - \sigma_2)\|d_k\|^2$, то переходим к шагу 7.

5. Вычисляем Q_k ; $\Delta\bar{x}_k = Q_k^T \Delta x_k$; $\Delta\bar{g}_k = Q_k^T \Delta g_k$;
 $\bar{g}_{k+1} = Q_k^T g_{k+1}$; $V_k = Q_k^T Q_{k-1}$; $W_k = Q_k^T \bar{Q}_{k-1}$
и $\bar{H}_k = V_k^T \bar{H}_k V_k + Q_k^T Q_k - W_k^T W_k$.

Вычисляем матрицу \bar{H}_{k+1} с помощью BFGS-формулы (12):

$$\bar{H}_{k+1} = U_{BFGS}(\Delta\bar{x}_k, \Delta\bar{g}_k, \bar{H}_k).$$

6. Если выполняются условия $1 - \frac{w_{k+1}^2}{(u_{k+1}v_{k+1})} \geq \frac{1}{4r_{k+1}}$ и

$$\frac{u_{k+1} \|d_k\|^2}{(v_{k+1} \|g_{k+1}\|^2)} \leq r_{k+1}, \quad \text{где } r_{k+1} > 0, \quad \text{тогда вычисляем}$$

$$(\alpha_{k+1} \quad \beta_{k+1})^T = -\bar{H}_{k+1}^{-1} \bar{g}_{k+1} \text{ и переходим к шагу 1.}$$

7. Присваиваем $x_0 \leftarrow x_k$ и переходим к шагу 0.

Численные эксперименты

Для проверки правильности работы алгоритма и программы были проведены численные эксперименты по нахождению точки минимума для расширенной функции Била, предложенной в работе [1].

Расширенная функция Била задается следующей формулой:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} \left[(1.5 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}))^2 + (2.25 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^2))^2 + (2.625 - x_{2i-1}(1 - x_{2i}^3))^2 \right],$$

где $n = 2, 4, 6, \dots$, $x \in R^n$. В качестве начального приближения берем $x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$. Точка $x^* = (3, 0.5, 3, 0.5, \dots, 3, 0.5)$ является точкой минимума данной функции. А также с помощью программы была найдена точка минимума с абсолютной погрешностью порядка 10^{-4} и порядка 10^{-6} . На рисунке 1 приведен график зависимости нормы градиента от количества итераций с точностью порядка 10^{-4} . График приведен в логарифмической шкале.

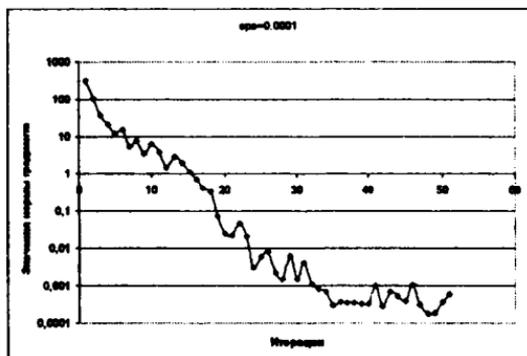


Рисунок 1 – График зависимости нормы градиента функции Била от количества итераций.

Сравнение результатов численных расчетов с аналитическим решением показало, что LS-BFGS метод находит минимум с хорошей точностью за небольшое число итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koko, J. A conjugate gradient method with a quasi-Newton approximation / J. Koko // *Applicationes Mathematicae*. - 2000 - №27. - P. 153-165.
2. Lemarechal, C. A view of line searches / C. Lemarechal // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. - 1980 - №30. - P. 59-78.
3. Ekelman M. A. Continuous Optimization Methods, Section 1 [Электронный ресурс] / М. А. Ekelman // . - Режим доступа: www-personal.umich.edu/~mepelman/teaching/IOE511/Handouts/511notes07-8_2.pdf.
4. Liu, Y. Efficient generalized conjugate gradient algorithms, Part 1: Theory / Y. Liu and C. Storey // *Journal of optimization theory and applications*. - 1991 - №69. - P. 129-137.
5. Hu, Y. F. Preconditioned low-order Newton methods/ Y. F. Hu and C. Storey // *Journal of optimization theory and applications*. - 1993 - №79. - P. 311-331.

СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Выделение тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений

Фролова А.В., Устинова И.Г.

Томский государственный университет

E-mail: sanushafro@sibmail.com

Анализ взаимосвязей экономических данных, представленных в виде временных рядов, является необходимой составной частью современных исследований в области экономики финансовых рынков. В конце 1980-х - начале 1990-х гг. было осознано, что только учет временной структуры данных о реальных экономических процессах позволяет адекватно отразить их в математических моделях [1,2].

Многие временные ряды, возникающие в практических задачах, могут быть описаны моделью (1):

$$y(t_i) = f(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где ε_i - случайная составляющая, а величина $f(t_i)$ - регулярная компонента, которая называется трендом временного ряда [3].

Заметим, что компоненты временного ряда ε_i и $f(t_i)$ различаются характером воздействия на значения последующих членов ряда. Наличие ε_i обусловлено ошибками измерений, внешними помехами и т. д. Соответственно, переменная $\varepsilon_i, i = \overline{1, n}$ влияет только на значение синхронного ей члена ряда, в то время как величина $f(t_i)$ описывает исследуемое явление и в известной степени определяет значение нескольких или всех последующих членов ряда. Через величину $f(t_i)$ осуществляется взаимодействие членов ряда; таким образом, в ней содержится информация, необходимая для получения прогнозов.

Компоненты ε_i и $f(t_i)$ являются теоретическими величинами, их выделение и составляет предмет анализа временного ряда в задаче прогнозирования.

В работе изучен параметрический способ выделения тренда, суть которого заключается в том, что временной ряд рассматривают как гладкую функцию $f(t_i)$, $i = \overline{1, n}$ [2]. В качестве прогнозирующей модели выбран метод наименьших квадратов, на основе которого оцениваются параметры функции $f(t_i)$.

Предположим, что временной интервал наблюдений $[0, T]$ разбит на непересекающиеся примыкающие друг к другу интервалы одинаковой длины T_0 . В данной работе на каждом отрезке разбиения $[(i-1)T_0, iT_0]$, где $i = \overline{1, n}$, тренд представим в виде детерминированной функции:

$$f(t_i) = \left(1 - i + \frac{t}{T_0}\right)a_i + \left(i - \frac{t}{T_0}\right)a_{i-1}, \text{ где } (i-1)T_0 \leq t \leq iT_0.$$

Для выделения тренда необходимо оценить коэффициенты сплайна a_i для всех i .

Таким образом, тренд временного ряда выделяется с помощью сплайна первого порядка, когда в каждый момент времени проводится случайное число измерений. Оценки коэффициентов сплайна первого порядка строятся рекуррентно методом наименьших квадратов, что позволяет выделить тренд в реальном масштабе времени по мере поступления соответствующей информации, и находятся из условий:

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{t=(i-1)T_0+1}^{iT_0} n_i \left[a_{i-1} \left(i - \frac{t}{T_0} \right) + a_i \left(1 - i + \frac{t}{T_0} \right) - y_t \right]^2 \rightarrow \min_{a_i, i=\overline{0, n}},$$

где n_i - случайная величина, распределенная по закону Пуассона с постоянной интенсивностью λ .

Стоит отметить, что в отличие от традиционных задач в области анализа временных рядов задача выделения тренда рассматривалась при условии, что в каждый момент времени происходит случайное число измерений.

Поставленная задача решалась на основе анализа данных АО "Газпром" за период 01. 02. 2011 - 30. 04. 2011г. В ходе реализации

построенной модели были получены результаты, приведенные на рисунке 1:

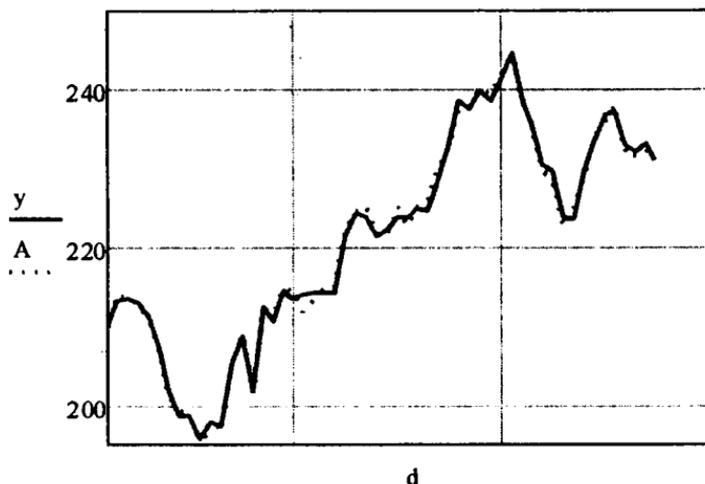


Рисунок 1 – Истинный тренд и полученная оценка тренда временного ряда.

где A - истинные значения цены сделки, y - найденные оценки цены сделки сплайном первого порядка, d - количество дней.

Используя построенную модель, получены несмещенные оценки параметров тренда в явном виде, позволяющие выделить тренд временного ряда с учетом того, что в каждый момент времени проводится случайное число сделок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 416 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1, - М.: Мир, 1974. - 406 с.
3. Тривоженко Б. Е. Выделение тренда временных рядов и потоков событий. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. - 286 с.

Оптимальная интерполяция поля вывала в районе Тунгусского явления

Карпова Т.В., Кривякова Э.Н.
Томский государственный университет
E-mail: [tanchik @danet in](mailto:tanchik@danet.in)

В районе Тунгусского явления имеется мощный вывал леса на площади более чем 2150 км. кв. [1,2]

Вывал леса определяет на плоскости поле азимутов (направлений) повала деревьев, характеризующее направление движения ударной волны. [1] Рассматривается поле направлений \bar{A} , полученное усреднением азимутов повала деревьев на площади фиксированного размера (0,25 га).



Рисунок 1 – Карта поваленного леса, по данным 1961 года.

Поле направлений представлено в виде

$$\bar{A} = \bar{A}(Q) = A_r(Q) + \alpha(Q),$$

где $Q \in D$, $A_r(Q)$ - азимут радиального направления в точке Q , $\alpha(Q)$ - отклонение от радиальности поля в этой же точке.

Из материалов о вывале значения \bar{A} известны лишь в точках, образующих нерегулярную сеть на плоскости. Для получения значений этого поля в регулярной сети точек и построения

изодный поля \bar{A} необходима его интерполяция (расчет значений поля в точках области, где они не определялись экспериментально). Случайное поле предполагается с некоторым огрублением однородным и изотропным. [2] Тогда интерполяционное значение $\hat{A}(Q_0)$ можно получить в произвольной точке области $Q_0 \in D$ методом оптимальной интерполяции [3] в виде:

$$\hat{A}(Q_0) = A_R(Q_0) + \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$\alpha_i = \alpha(Q_i) = \bar{A}(Q_i) - A_R(Q_i),$$

p_i - весовые множители.

Настоящая работа проведена по дополненному в 1983 г. Каталогу [3].

Полученные интерполяционные значения позволяют построить интегральные линии и изогональные траектории, определяющие характер ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л.С. Объективный анализ метеорологических полей// Оптимальная интерполяция. – 1963. – С.73 – 116.
2. Фаст В.Г. Статистический анализ параметров Тунгусского вывала // Проблема Тунгусского метеорита. – 1967. – Вып.2. – С.40 - 61
3. Фаст В.Г., Баранник А.П., Разин С.А. О поле направлений повала деревьев в районе падения Тунгусского метеорита/ Вопросы метеоритики. – Томск: Изд-во ТГУ, 1976. – 39 - 52 с.

Системы одновременных уравнений

Лунышина И.В., Кривякова Э.Н.
Томский государственный университет
E-mail: innochkal@sibmail.com

Эконометрия (эконометрика), наука, изучающая конкретные количественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Объектом статистического изучения в экономических и социальных науках являются системы закономерностей формирования и изменения экономических и социальных явлений. Измерение тесноты связей между переменными, составление уравнений регрессии недостаточно для описания таких систем и объяснения механизма их функционирования. При использовании уравнений, например, для экономических расчетов, в большинстве случаев предполагается, что аргументы (факторы) можно изменять независимо друг от друга. Однако это предположение является неточным: практически изменение одной переменной не может происходить при неизменности других. Ее изменение повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков. Следовательно, отдельно взятое уравнение не может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на изменение результирующей переменной. Именно поэтому в последние десятилетия в экономических, биометрических и социологических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой, так называемых одновременных уравнений, называемых также структурными уравнениями.

Эконометрическая модель, выраженная системой одновременных уравнений (СОУ), служит для объяснения поведения эндогенных (т.е. формирующихся в процессе и внутри функционирования описываемой социально-экономической системы) переменных в зависимости от значения экзогенных (задаваемых извне) и лаговых переменных. [1] СОУ широко используются в проведении многовариантных сценарных расчетов, касающихся социально-экономического развития анализируемой системы, а также в задачах прогноза экономических и социально-экономических показателей.

В данной работе изучена эконометрическая модель, характеризующая общую экономическую ситуацию в стране, представленная в виде системы одновременных уравнений

$$\begin{cases} Q_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_t^{(1)}, \\ C_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_t^{(2)}, \\ I_t = a_3 + b_{31}(Y_{t-1} - K_{t-1}) + \varepsilon_t^{(3)}, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases} \quad (3.1)$$

где

Q_t – реализованная продукция в текущий период t ;

Y_t – валовая добавленная стоимость в текущий период t ;

C_t – конечное потребление в текущий период t ;

I_t – инвестиции в текущий период t ;

K_{t-1} – запас капитала в предыдущий период $t-1$;

Y_{t-1} – ВДС в предыдущий период $t-1$;

$a_1, a_2, a_3, b_{11}, b_{21}, b_{31}$ – неизвестные коэффициенты; $\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)}$ и $\varepsilon_t^{(3)}$ некоррелированные случайные величины, имеющие нулевые математические ожидания и дисперсии $D\varepsilon_t^{(1)} = \sigma_1, D\varepsilon_t^{(2)} = \sigma_2, D\varepsilon_t^{(3)} = \sigma_3$, не зависящие от t . [4]

Задача состояла в следующем: определить основные структурные характеристики системы уравнений, исследовать на идентифицируемость каждое уравнение системы, оценить её параметры и построить прогноз значений зависимых переменных модели. [3]

Была рассмотрена общая теория систем одновременных уравнений и показано, что исследуемая модель является сверхидентифицируемой. Структурная форма была преобразована в приведенную систему уравнений, где эндогенные переменные выражены через экзогенные и лаговые переменные.

Параметры модели были оценены двухшаговым методом наименьших квадратов. [2] Их значения приведены в таблице

a_1	119.645	b_{11}	1.5972
a_2	56.318	b_{21}	1.8784
a_3	84.529	b_{31}	-0.000552

Используя полученные оценки, был построен точечный и интервальный прогноз зависимых переменных на 2009 год. Он показал, что значения параметров, которые были получены с помощью точечного прогноза, близки к реальным данным (см. таблицу).

Таблица. Точечный прогноз на 2009 год в млрд. руб.

наименование	значения параметров по прогноза	фактические данные
Реализованная продукция Q_t	2597.5	2515.9
Конечное потребление C_t	2996.7	2944.5
Инвестиции I_t	427.5	416.3
ВДС Y_t	1575.3	1513.0

Для двухшагового метода наименьших квадратов и построения прогноза были составлены алгоритмы и на их основе написана программа, позволяющая получить решение поставленной задачи.

Отметим, что исследованную модель можно использовать для описания общей экономической ситуации в регионе или в стране по показателям промышленности, строительства, транспорта и другим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики _ ч.2 Основы эконометрики//Системы линейных одновременных уравнений. – М.: Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики _ ч.1 Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: Изд-во ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с
3. Елисеева И.И. Эконометрика. – М.: Изд-во Финансы и статистика, 2005. – 574 с.
4. Елисеева И.И., Курешева С.В., Гордиенко Н.М. Практикум по эконометрике. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 192 с.

Задача оптимального потребления и инвестирования для модели Блэка-Шоулса

Смирнов А.Е., Пергаменщikov С.М.
Томский государственный университет
E-mail: magnuswest@mail.ru

Одна из фундаментальных задач финансовой математики – это распределение ресурсов между финансовыми активами с целью

обеспечения достаточных выплат, а также, чтобы получить высокий доход. Эта оптимизационная задача берет свое начало с основополагающей работы Мертона (1971). С тех пор, интерес к задаче оптимального потребления и инвестирования возрос, и классическая задача Мертона стала обобщаться [1-5].

В данной работе исследуется обобщение задачи Мертона, а именно задача оптимального потребления и инвестирования для инвестора, оперирующего на финансовом рынке типа Блэка-Шоулса:

$$\begin{cases} B_t = 1 \\ \frac{dS_t}{S_t} = (\mu + \beta Y_t)dt + \sigma \sqrt{Y_t} dW_t, S_0 = s > 0 \end{cases}$$

где $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ - винеровский процесс, согласованный с фильтрацией; $Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j$ - составной пуассоновский процесс, ξ_j - независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F , неотрицательные п.н., $E\xi_j^2 < \infty$; $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$ - пуассоновский процесс с интенсивностью l .

Инвестор, принимающий решения, касающиеся потребления и инвестирования, базируется на функции полезности $p(x) = x^\gamma$, где $\gamma \in (0, 1)$. Рассмотрим процесс капитала $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$:

$$X_t = \phi_t B_t + \varphi_t S_t,$$

где ϕ_t - количество безрискового актива в момент времени t , а φ_t - количество рискованного актива.

Пусть $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$ - скорость потребления капитала на протяжении отрезке $[0, T]$, то есть неотрицательный процесс, прогрессивно измеримый относительно фильтрации, и такой, что

$$\int_0^T c_t dt < \infty \text{ п.н.}$$

Обозначим через $\pi_t = \frac{\varphi_t S_t}{X_t}$ - долю капитала, инвестируемую в

рисковый актив. Тогда процесс капитала удовлетворяет следующему уравнению:

$$dX_t = (\pi_t X_t (\mu + \beta Y_t) - c_t) dt + \pi_t X_t \sigma \sqrt{Y_t} dW_t. \quad (1)$$

Определение. Стратегия $(c, \pi) = (c_t, \pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ называется допустимой, если выполняются следующие условия:

1. $(c, \pi) : (0, T] \times \Omega \rightarrow [0, \infty) \times [0, 1]$ - прогрессивно измеримая, относительно фильтрации,

2. $\int_0^T c_s ds < \infty$ п.н.,

3. стохастическое дифференциальное уравнение 1 имеет единственное (сильное) положительное решение.

Наша цель - разрешить следующую оптимизационную задачу

$$\sup_{c, \pi} E \left[\int_0^T (c_s)^{\gamma} ds + (X_T)^{\gamma} \mid X_0 = x, Y_0 = y \right],$$

то есть найти потребление и инвестирование, доставляющие супремум.

Чтобы разрешить задачу, воспользуемся методами динамического программирования. Основная идея этого подхода состоит в том, чтобы вложить рассматриваемую задачу в некоторый широкий класс задач и затем связать между собой все эти задачи с помощью уравнения в частных производных, называемого уравнением Гамильтона-Якоби-Бэллмана. Введем ряд вспомогательных задач - нахождение оптимальной стратегии для функций

$$V(t, x, y) = \sup_{c, \pi} E \left[\int_t^T (c_s)^{\gamma} ds + (X_T)^{\gamma} \mid X_t = x, Y_t = y \right].$$

Оказывается, чтобы найти функцию $V(t, x, y)$, достаточно разрешить следующее интегро-дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби-Бэллмана:

$$\sup_{(c, \pi) \in [0, \infty) \times [0, 1]} \left\{ c^{\gamma} + \frac{\partial v}{\partial t}(t, x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x, y)(\pi x(\mu + \beta y) - c) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x, y)(\pi^2 x^2 \sigma^2 y) + l \int_{\mathbb{R}} (v(t, x, y+z) - v(t, x, y)) F(dz) \right\} = 0,$$

$$v(T, x, y) = x^{\gamma}.$$

Разрешив эту экстремальную задачу, находим оптимальную стратегию:

$$c_t = x f(t, y) \frac{1}{1-\gamma},$$

$$\pi = \begin{cases} 0, & y \in D_1 \\ \frac{\mu + \beta y}{(1-\gamma)\sigma^2 y}, & y \in D_2, \\ 1, & y \in D_3 \end{cases}$$

где $D_1 = \{y > 0 : \mu + \beta y < 0\}$, $D_2 = \{y > 0 : (1-\gamma)\sigma^2 y > \mu + \beta y > 0\}$, $D_3 = \{y > 0 : \mu + \beta y > 0, \mu + \beta y > (1-\gamma)\sigma^2 y\}$, а функция f является решением следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + l \int_{\mathbb{R}} (f(t, y+z) - f(t, y)) F(dz) +$$

$$+ \gamma f(t, y) Q(y) + (1-\gamma) f(t, y) \frac{-\gamma}{1-\gamma}, f(T, y) = 1,$$

где

$$Q(y) = \begin{cases} 0, & y \in D_1 \\ \frac{(\mu + \beta y)^2 (2 + \gamma)}{2(1-\gamma)\sigma^2 y}, & y \in D_2, \\ \mu + \beta y + \frac{1}{2} \gamma (1-\gamma)\sigma^2 y, & y \in D_3 \end{cases}$$

Существование решения последнего уравнения доказывается при помощи фундаментальной формулы Фейнмана-Каца, которая устанавливает связь между параболическими уравнениями и случайными процессами.

Оптимальность стратегии проверяется при помощи следующей теоремы.

Теорема (верификации). Пусть $v : [0, T) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и удовлетворяет для любой стратегии $(c, \pi) \in A$ условию

$$0 \geq c' + \frac{\partial v}{\partial t}(t, x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x, y)(\pi x(\mu + \beta y) - c) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x, y)(\pi^2 x^2 \sigma^2 y) + l \int_{\mathbb{R}} (v(t, x, y+z) - v(t, x, y)) F(dz)$$

для всех $(t, x, y) \in [0, T) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$, с

$$v(T, x, y) = x^\gamma, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Тогда

$$v(T, x, y) \geq V(t, x, y), \quad (t, x, y) \in [0, T) \times (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Более того, если существует допустимая стратегия (c', π') такая, что

$$0 = (c')^\gamma + \frac{\partial v}{\partial t}(t, x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, x, y)(\pi' x(\mu + \beta y) - c') + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x, y)((\pi')^2 x^2 \sigma^2 y) + l \int_{\mathbb{R}} (v(t, x, y+z) - v(t, x, y)) F(dz),$$

для всех $(t, x, y) \in [0, T) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$, тогда

$$v(T, x, y) = V(t, x, y), \quad (t, x, y) \in [0, T) \times (0, \infty) \times (0, \infty),$$

и стратегия (c', π') - оптимальная.

Этот результат обычно называют верификационной теоремой динамического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липцер Р. Ш. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы) / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. - М.: Наука, 1974. - 696 с.
2. Липцер Р. Ш. Теория мартингалов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. - М.: Наука, 1986. - 512 с.
3. Ширяев А. Н. Основы финансовой математики / А. Н. Ширяев. - М.: Фазис, 1998. - 512 с.
4. Delong L., Kluppelberg C. Optimal investment and consumption in a Black-Scholes market with stochastic coefficients driven by a non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process.
5. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время / Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 39. Вып. 1.

СЕКЦИЯ «ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Метризуемые подпространства в свободных абелевых топологических n -периодических группах

Паньковская Е.А., Гензе Л.В.
Томский государственный университет
E-mail: askes_liza@mail.ru

Определение. *Прямой суммой* семейства абелевых групп $\{A_s : s \in S\}$ называется подмножество в декартовом произведении координат $\prod_{s \in S} A_s$, состоящее из элементов $\{a_s\}_{s \in S}$, у которых $a_s \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $s \in S$.

Определение. *Свободной абелевой группой, порожденной множеством X* , называется прямая сумма семейства групп $\{Z_x : x \in X\}$, где группа Z_x - это группа целых чисел для каждого $x \in X$. Элементами группы $A(X)$ являются формальные линейные комбинации вида $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, α_i - целые числа, $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Пусть $k \geq 2$ - фиксированное число и X - произвольное множество. *Свободной абелевой k -периодической группой, порожденной множеством X* , будем называть прямую сумму семейства групп $\{Z_x^k : x \in X\}$, где группа Z_x^k изоморфна Z_k (аддитивной группе классов вычетов по модулю k) для каждого $x \in X$. Обозначим эту группу $A^{(k)}(X)$.

Определение [1]. *Свободной абелевой k -периодической топологической группой тихоновского пространства X* будем называть свободную абелеву k -периодическую группу $A^{(k)}(X)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) X гомеоморфно замкнутому подпространству в $A^{(k)}(X)$;

- 2) $A^{[k]}(X)$ является свободной абелевой k -периодической группой, порожденной множеством X ;
- 3) Если G - произвольная абелева k -периодическая топологическая группа и $f: X \rightarrow G$ - непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}: A^{[k]}(X) \rightarrow G$.

Пусть (X, d) - метрическое пространство и $A^{[k]}(X)$ - его свободная абелева k -периодическая топологическая группа. Рассмотрим подмножество $A_n^{[k]}(X) \subset A^{[k]}(X)$, состоящее из всех несократимых слов вида $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$ длины не больше n , т.е. тех слов, для которых сумма $\alpha_1 + \dots + \alpha_p$ (понимаемая в обычном смысле) не превосходит n .

Определим метрику ρ на множестве

$$E(X) = \{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p \mid x_i \in X, i = 1, \dots, p, \alpha_1 + \dots + \alpha_p = km, m \in \mathbb{N} \}$$

следующим образом:

- $\rho(0, 0) = 0$;
- Если $\bar{x} \in E(X)$ имеет несократимую запись вида $\bar{x} = x_1 + \dots + x_k$, то расстояние его до нуля примем равным $\rho(0, \bar{x}) = \rho(\bar{x}, 0) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k d(x_i, x_j)$;
- Если $\bar{x} \in E(X)$ имеет вид $\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = km$ и $m \in \mathbb{N}$, то расстояние его до нуля примем равным $\rho(0, \bar{x}) = \min \sum_{l=1}^m \rho(0, y'_1 + \dots + y'_k)$, где минимум берется по всевозможным представлениям $\bar{x} = \bar{y}^1 + \dots + \bar{y}^m$, где $\bar{y}^l = y'_1 + \dots + y'_k$ для каждого $l = 1, \dots, m$;
- И наконец, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(0, \bar{x}) + \rho(0, \bar{y})$.

Пусть m^+ - множество последовательностей положительных чисел. Рассмотрим множества вида:

$$U_n(\varepsilon) = \{\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A^{[k]}(X), d(x_1, x_2) < \varepsilon_n, \alpha_1 + \alpha_2 = k\}$$

$$\tilde{U}_n(\varepsilon) = U_1(\varepsilon) + \dots + U_n(\varepsilon) \quad , \quad \text{где}$$

$$U(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_n(\varepsilon)$$

$$\varepsilon \in m^+.$$

Теорема. Семейство $\tau = \{U(\varepsilon), \varepsilon \in m^+\}$ является базой нуля некоторой групповой топологии τ на $A^{[k]}(X)$.

Теорема. Топология τ , при отождествлении точек $x \in X$ со словами $\bar{x} = x$ группы $A^{[k]}(X)$, индуцирует на пространстве X его исходную топологию τ_x .

Теорема. Топология τ – сильнейшая из всех групповых топологий на $A^{[k]}(X)$, индуцирующих на X исходную топологию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гензе Л.В. Свободные n -периодические топологические группы. Вестник ТГУ. Математика и Механика. 2010. №3(11). С. 23-28.

Пространства непрерывных функций на стрелке Зоргенфрея

Трофименко Н.Н., Хмылева Т.Е.

Томский государственный университет

E-mail: Trofimenko@sibmail.com

Впервые прямая Зоргенфрея, также называемая стрелкой, встречается в книге «Мемуар о компактных топологических пространствах» П.С. Урысона и П.С. Александрова в 1929 г. В 1947 г. вышла статья Зоргенфрея, в которой он представил топологическое пространство K в качестве контрпримера, показывающего, что квадрат паракомпакта может не быть нормальным. В дальнейшем пространство K назвали прямой Зоргенфрея. Итак, прямая, которую мы будем обозначать символом

K , представляет из себя числовую прямую, базу которой образуют полуинтервалы вида $(a, b]$, где a – рациональное число.

Обозначим через \mathcal{E} – канторово множество, через \mathcal{E}_1 – подмножество \mathcal{E} , $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}T$, где T – множество правых концов выброшенных интервалов и через I – отрезок $[0, 1]$.

В данной работе рассматриваются линейные гомеоморфизмы между пространствами непрерывных вещественнозначных функций $C_p(\mathcal{E}_1)$, $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$, где \mathcal{E}_1 , I и \mathcal{E} наделены топологией Зоргенфрея, а пространства функций наделены топологией поточечной сходимости.

Если \mathcal{E}_1 , \mathcal{E} и I рассматривать в естественной топологии, то по теореме Пестова [1] между пространствами $C_p(\mathcal{E}_1)$ и $C_p(I)$ и между пространствами $C_p(I)$ и $C_p(\mathcal{E})$ не существует линейного гомеоморфизма в силу разных индуктивных размерностей \mathcal{E}_1 , \mathcal{E} и I (пространства \mathcal{E}_1 и \mathcal{E} являются нульмерными, а I имеет размерность один). В топологии Зоргенфрея пространства \mathcal{E}_1 , \mathcal{E} и I являются нульмерными и верны следующие теоремы:

Теорема 1. Пространства $C_p(\mathcal{E}_1)$ и $C_p(I)$ являются линейно гомеоморфными.

Доказательство основано на том, что отображение канторова лестница и является гомеоморфизмом пространства \mathcal{E}_1 на I .

Теорема 2. Пространства $C_p(\mathcal{E})$ и $C_p(I)$ являются линейно гомеоморфными.

Для доказательства линейного гомеоморфизма применяется схема Пелчинского: пространство $C_p(\mathcal{E})$ линейно гомеоморфно дополняемо вкладывается в пространство $C_p(I)$, пространство $C_p(I)$ также линейно гомеоморфно дополняемо вкладывается в пространство $C_p(\mathcal{E})$, и оба пространства изоморфны своим квадратам.

Рассмотрим пространства $C_p(I)$ и $C_p(I \times I)$. В работе В.Г. Пестова [1] показано, что пространства $C_p(I)$ и $C_p(I \times I)$ не являются линейно гомеоморфными, так как I и $I \times I$ в естественной топологии имеют

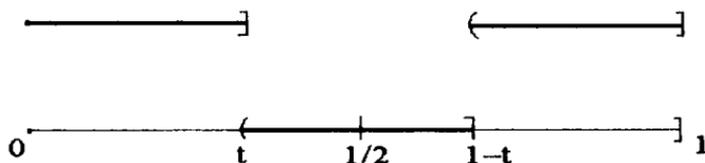
разные индуктивные размерности (пространство I имеет размерность один, а $I \times I$ размерность два). В топологии Зоргенфрея I и $I \times I$ являются нульмерными пространствами, но поскольку I – линделёфово, а $I \times I$ – не линделёфово, то в силу теоремы Величко [2], имеем следующий результат:

Теорема 3. Пространства $C_p(I)$ и $C_p(I \times I)$ не являются линейно гомеоморфными.

Ответ на вопрос о линделёфовости самих пространств $C_p(I)$ и $C_p(I \times I)$ дает следующая теорема.

Теорема 4. Пространства $C_p(I)$ и $C_p(I \times I)$ не являются линделёфовыми.

Доказательство основано на том, что в пространстве $C_p(I)$ существует несчетное замкнутое дискретное множество функций $D = \{x_t\}_{t \in (0, \frac{1}{2})}$ следующего вида



Так как пространство $C_p(I)$ замкнуто линейно гомеоморфно вкладывается в пространство $C_p(I \times I)$, то в пространстве $C_p(I \times I)$ также существует замкнутое несчетное дискретное множество, а это означает, что $C_p(I \times I)$ не является линделёфовым пространством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pestov V.G. The coincidence of the dimensions \dim of l -equivalent topological spaces // Dokl. Akad. Nauk SSSR. № 266. С 553–556.
2. Velicho N.V. The Lindelof property is l – invariant // Topology and its Applications. 1998. № 89. С 277–283.

СЕКЦИЯ «ФИЗИЧЕСКАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

Теоретическое и экспериментальное исследование тепловых смерчей

Белоусова А.О., Голованов А.Н.
Томский государственный университет
E-mail: Anita@t-sk.ru

В огромном многообразии вихревых движений отчетливо выделяются концентрированные вихри, которые привлекают повышенный интерес. Среди природных явлений, имеющих отношение к концентрированным вихрям, несомненно, следует назвать смерчи. Смерчи — одно из удивительнейших явлений природы, до сих пор вызывающее большие споры. В настоящее время в мире ежегодно регистрируется около 1000 смерчей. Однако именно смерчи и торнадо являются самыми неизученными по причине невозможности исследования их в природных условиях. Поэтому моделирование тепловых смерчей в лабораторных условиях является актуальной задачей.

Целью данной работы является физическое моделирование теплового смерча в лабораторных условиях, исследование влияния акустических колебаний на формирование и устойчивость теплового смерча, построение границы устойчивости.

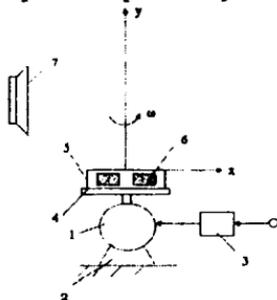


Рисунок 1 – экспериментальная установка.

Объектом исследования был созданный в лабораторных условиях тепловой смерч. Для визуализации картины течения в смерче использовались частички канифоли, находящейся на нагревательном элементе.

На рис. 1 показано устройство экспериментальной установки.

В процессе проведения экспериментов измерялись профили скорости вдоль координаты x , y и z с помощью лазерной доплеровской измерительной системы (ЛДИС) для диагностики газожидкостных потоков ЛАД-05М. А также рассматривался вопрос о возникновении и дальнейшем поведении теплового смерча, а также об изменении его геометрических размеров. Пользуясь ранее проведёнными исследованиями, было установлено, что тепловой смерч появлялся в достаточно узком диапазоне частот вращения основания ($0,7 \div 1,8$ Гц), причем как при значении, близком к $0,7$ Гц, так и при близком к $1,8$ Гц, смерч становился неустойчивым. В связи с этим дальнейшие измерения осуществлялось при частоте $\omega = 1,2$ Гц.

По данным эксперимента было получено значение параметра крутки $S = 0.1$. Для этого значения параметра были построены дисперсионные кривые. Исследование проводилось для осесимметричной моды $m = 0$.

Дисперсионные кривые приведены на рис. 2. Слева - график реальной, а справа - график мнимой частей комплексной частоты. Из графика следует, что закрутка имеет стабилизирующий эффект, но в любом случае течение остаётся неустойчивым.

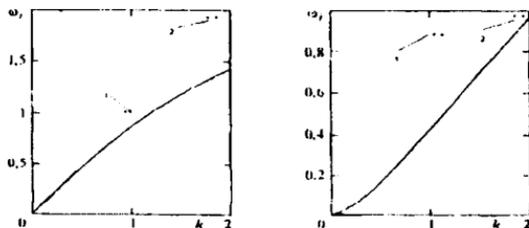


Рисунок 2 – Дисперсионные кривые для неустойчивой моды при $m = 0, S = 0.1$. 1 – для частоты акустических колебаний $\omega = 100$, 2 – для частоты акустических колебаний $\omega = 200$.

Как видно из рисунка, экспериментальные точки, нанесённые на графики, оказались в области неустойчивости, что означает соответствие экспериментальных данных и теоретических результатов.

Исследование пространственной неустойчивости проводилось по аналогии со случаем временной неустойчивости для моды $m=0$ и для параметра крутки $S=0.1$. Экспериментальные точки оказались выше дисперсионной кривой (рис. 3), следовательно, пространственная неустойчивость также имеет место быть. Таким образом, показано согласование экспериментальных результатов с теоретическими выводами.

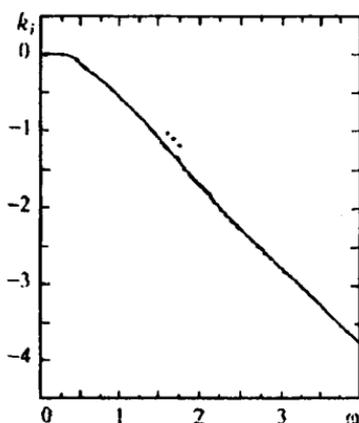


Рисунок 3 – Расположение экспериментальных точек на графике при $m=0$, $S=0.1$,
 $\omega = 100$.

Наблюдения показывают, что закрученные потоки во многих случаях неустойчивы. Неустойчивость приводит к формированию вторичных движений, может привести к распаду вихря. Особенностью возмущений является их трехмерная структура. В результате теоретического исследования можно сделать вывод, что из рассмотренных типов временной неустойчивости, нашему случаю соответствуют короткие волны. На основе эксперимента доказано, что волны нейтрально устойчивы.

При поведении эксперимента частота акустического поля изменялась в пределах $0 \div 1500$ Гц. Источник звуковых колебаний находился на расстоянии 210 мм от оси симметрии диска и на

высоте 180 мм над ним. Результаты исследования показали, что без воздействия акустических колебаний, тепловой смерч представляет собой довольно устойчивую структуру. Варьирование частот в диапазоне выше 300 Гц показало, что смерч на них не реагирует. В диапазоне $0 \div 300$ Гц были обнаружены избирательные частоты, при которых наблюдалось разрушение смерча. Интересно, что это частоты кратные 100 Гц (100, 200, 300 Гц).

По полученным результатам измерений скорости в экспериментальных точках рассчитывался коэффициент корреляции. В итоге был сделан вывод, что взаимодействие акустических колебаний с пульсациями скорости газа в смерче носит резонансный характер. Это и приводит к разрушению теплового смерча.

По итогам проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

1) наиболее близким к реальному смерчу является модель вихря Бюргерса с учётом вязкости[1];

2) экспериментально установлена частота, при которой вихрь, созданный в лабораторных условиях, наиболее устойчив;

3) установлены частоты акустических колебаний, при которых вихрь распадается;

4) доказано, что результаты эксперимента согласуются с теоретическими данными[2];

5) исследована пространственная и временная неустойчивость теплового смерча с использованием экспериментальных данных и теоретических приближённых формул[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С.В., Кужбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. - Новосибирск: ИТФ СО РАН, 2003.
2. Пуанкаре А. Теория вихрей. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 160 стр.
3. Loiseleux T., Chomaz J.M., Huerre P. The effect of swirl on jets and wakes: linear instability of the Rankine vortex with axial flow// Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 10, N 5 – P. 1120 – 1135.

Исследование возникновения и распространения степного пожара от точечного и линейного источников в природных условиях

Караваяев В.В., Лобода Е.Л.

Томский государственный университет

E-mail: vasily_karavaev@mail.ru

Моделирование степного пожара проводилось в районе г. Карасук Новосибирской области с характерной для степей и южных лесостепей растительностью, на ровной площадке с нулевым углом наклона.

Температура воздуха, относительная влажность и атмосферное давление контролировались при помощи метеостанции Meteocap RST01923. Температура воздуха T варьировалась в пределах 289...293 К. Относительная влажность воздуха φ равна 32–45 %. Атмосферное давление P_e – 738–741 мм рт. ст. Скорость ветра изменялась в диапазоне 3-8 м/с, температура почвы – 287,8 К, влагосодержание почвы – 14,7%. Влагосодержание РГМ определялось при помощи анализатора влажности AND MX-50 с точностью 0,01%. Запас 126,8 – 153,7г/м². Влагосодержание доминирующих растений в составило: пырей – 11%, полынь – 44%, типчак – 26,8%, подорожник – 10,7%. Время t при проведении экспериментов контролировалось при помощи секундомера Agat 010 с точностью 0,2 с. Суммарные относительные погрешности определения параметров не превышали $\delta w/w \cdot 100\% \leq 3,3\%$, $\delta m/m \cdot 100\% \leq 1,2\%$, $\delta P_e/P_e \cdot 100\% \leq 6,0\%$, $\delta T/T \cdot 100\% \leq 5,3\%$, $\delta \varphi/\varphi \cdot 100\% \leq 2,5\%$, $\delta t/t \cdot 100\% \leq 4,3\%$.

Распространение фронта горения и его структура в видимой области контролировались с помощью видеокамеры Sony DCR-DVD505E, а температурное поле фронта с помощью гребенок термопар ХА (хромель-алюмель) с диаметром 500 мкм, расположенных в продольном и вертикальном направлениях относительно выбранной полосы исследований. Термопары крепились на кронштейнах длиной 0,2 м, расположенных на вертикальных стойках с шагом 0,3 м. Кронштейны ориентировались в направлении, параллельном фронту пожара, как показано на рисунке 2. Показания термопар регистрировались при помощи

измерительного комплекса, описанного в [1] с последующей доработкой под полевые измерения.

В инфракрасной области характеристики фронта горения регистрировались с помощью тепловизоров JADE J530SB и Inframetrics-760. Тепловизор JADE J530SB использовался с дисперсионным оптическим фильтром, спектральный интервал которого составлял 2,5-2,7 мкм. Тепловизор Inframetrics-760 имел рабочий диапазон длин волн от 3 до 5 мкм.

В первой серии из трех экспериментов проводились исследования характеристик фронта ступенного пожара, направленного вдоль и перпендикулярно направлению скорости ветра, в результате линейного поджига.

Количественный состав доминирующих растений и запас СГМ на 1 м^2 составил: для 1-го и 2-го экспериментов $m = 0,254 \text{ кг}$ (в том числе: пырей ползучий – 0,178 кг, полын австрийская – 0,065 кг); для 3-го эксперимента – 0,185 кг (в том числе: пырей ползучий – 0,172 кг, полын австрийская – 0,01 кг).

Схема эксперимента приведена на рисунке 1.

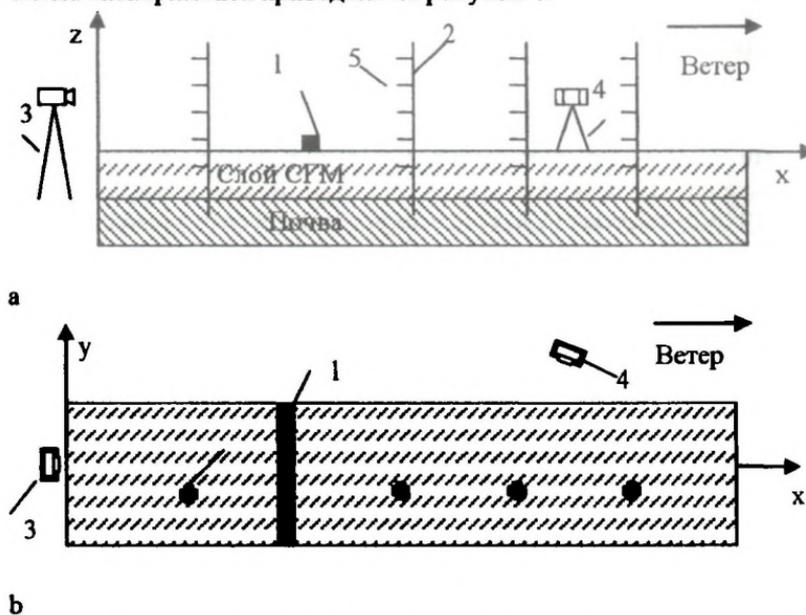


Рисунок 1 – Вид площадки сбоку (а) и сверху (б) первой серии экспериментов: 1 – источник зажигания, 2 – стойки термопар, 3 – тепловизор Inframetrics-760, 4 – тепловизор JADE J530SB, 5 – термопары

Для калибровки показаний тепловизоров использовали данные, полученные с термопар. На рисунках 2а и 2b приведена термограмма и распределение температур в точках 1, 2, 3, которые находятся в непосредственной близости от термопар, а на рисунке 2с приведены результаты измерений при помощи термопар для второго эксперимента. Кривые 1-3 на рисунке 2с соответствуют показаниям термопар, расположенных рядом с точками 1-3 на рисунке 2а, кривые 4 и 5 соответствуют показаниям термопар, расположенных выше точки 3 на 30 см и 60 см соответственно. Очевидно совпадение максимальных температур во фронте горения, полученных тепловизором и термопарами.

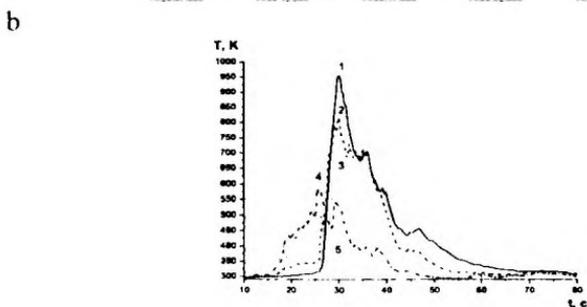
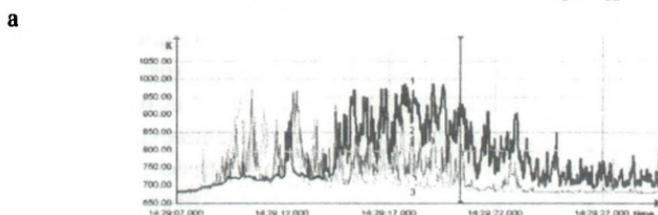
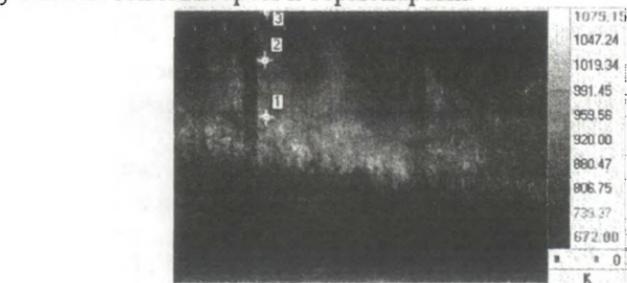


Рисунок 2 - Термограмма (а), изменение температур во фронте пожара в точках 1, 2, 3 (б) по данным, полученным с тепловизора JADE J530SB и изменение

температур во фронте пожара по зарегистрированным показаниям термопар (с) для второго эксперимента.

В результате измерений было получено удовлетворительное согласование показаний термопар и тепловизора JADE J530SB при коэффициенте излучения $\epsilon=0.79$. Для тепловизора Inframetrics-760 удовлетворительное согласование температур достигалось при $\epsilon=0.65$. Различие коэффициентов излучения шириной диапазона работы тепловизоров. Можно сделать вывод, что температуры на передней и задней кромках фронта горения колеблются в диапазоне 730÷950 К и достигают максимума около 1100 К в глубине фронта горения.

Дополнительно были определены скорости распространения фронта пожара v_f в зависимости от скорости ветра v_e , которые приведены на рисунке 3. Для определения скорости распространения фронта горения использовалась видеозапись. В качестве текущего положения фронта горения считалось расположение передней кромки фронта в нижней части факела пламени. Верхняя часть факела пламени при измерениях не учитывалась, т.к. она не соприкасалась с РГМ. Необходимо отметить, что на временном интервале 0-7 с большая скорость распространения фронта горения обусловлена воздействием полосы зажигания высота пламени у которой была значительно выше высоты пламени при горении РГМ. Последующее после зажигания значительное увеличение скорости ветра вначале не приводило к соответствующему увеличению скорости распространения фронта горения, т.к. значительная часть биомассы верхнего яруса выгорела под воздействием интенсивного горения полосы зажигания. Поэтому целесообразно рассматривать значения v_f в последующие моменты времени.

Из анализа кривых на рисунке 3 отчетливо видна прямая зависимость между скоростью ветра и скоростью распространения фронта пожара на отрезке времени после 60 с.

На рисунке 6 приведена термограмма и вертикальные профили температуры во фронте пожара, полученные при помощи тепловизора JADE J530SB.

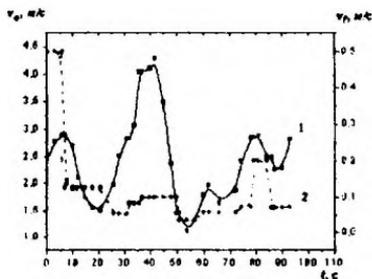


Рисунок 3 – Экспериментальные значения скорости распространения степного пожара в зависимости от скорости ветра: 1 – скорость ветра, 2 – скорость фронта пожара.

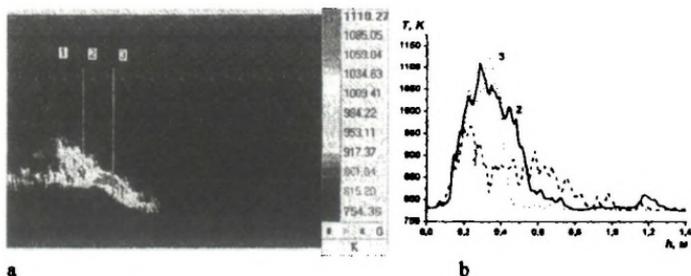


Рисунок 4 – Термограмма (а) и профили температуры (б) во фронте степного пожара, образованного от точечного источника зажигания: 1, 2 и 3 – соответствуют сечению 1, 2 и 3 на рисунке 3а соответственно.

Из анализа рисунка 4 видно, что максимальные температуры внутри фронта степного пожара наблюдаются на высоте $0,2 \div 0,7$ м, что связано со структурой растительного покрова и согласуется с высотой доминирующих растений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплекс установок для исследования природных пожаров / А.М. Гришин [и др.] // Изв. вузов. Физика. 2009. № 2/2. С. 84–90.

Экспериментальные и теоретические исследования зажигания торфа от низового лесного пожара

Касымов Д.П., Гришин А.М., Зима В.П.
Томский государственный университет
E-mail: Kasimov_den464a@mail.ru

В работе дается краткое описание экспериментальной установки, подробная схема проведения эксперимента, анализ результатов экспериментальных исследований. Проведены эксперименты по изучению перехода низового лесного пожара в торфяник. На основе экспериментальных данных получена скорость горения вершинного торфа. Установлены критические значения для температуры источника зажигания.

В Российской Федерации торфяные пожары, наряду с лесными и степными пожарами, являются довольно распространенным негативным природным явлением. В частности, в августе и сентябре 2010 года торфяные пожары имели место на огромной территории Европейской части Российской Федерации. Как правило, торфяники горят в засушливый период времени и могут возникать в результате действия низового лесного пожара [1]. Впервые результаты экспериментальных исследований торфяных пожаров описаны в [2]. В дальнейшем в Томском государственном университете была разработана новая установка по исследованию лесных, степных и торфяных пожаров, на которую был получен патент [3]. Условия перехода низового лесного пожара в торфяной изучены недостаточно, поэтому представляют интерес результаты экспериментальных исследований торфяных пожаров на установке, описание которой даны в [3].

Экспериментальные исследования торфяных пожаров представлены в работах [4, 5], а уточненные общие математические модели лесных и торфяных пожаров и их приложения даны в работах [6, 7].

В данной работе дается краткое описание экспериментальной установки, анализ результатов экспериментальных исследований.

Краткое описание экспериментальной установки

Исследования проводились на лабораторном испытательном комплексе, позволяющем смоделировать различные типы пожаров [2]. Испытательный комплекс представляет собой короб – полигон для изучения зажигания торфа и моделирования торфяных пожаров (см. рис. 1). Размер короба – полигона 1.5×1.5×0.3 м.

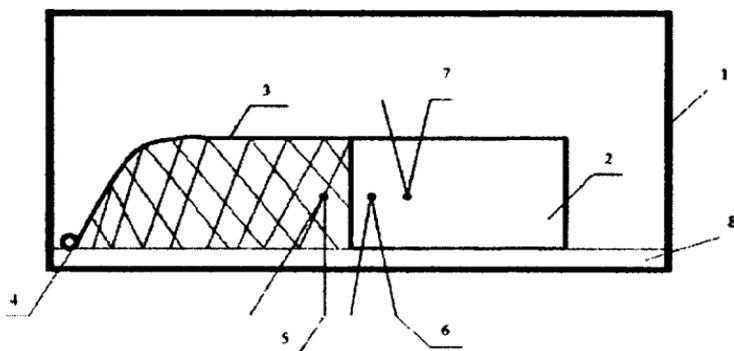
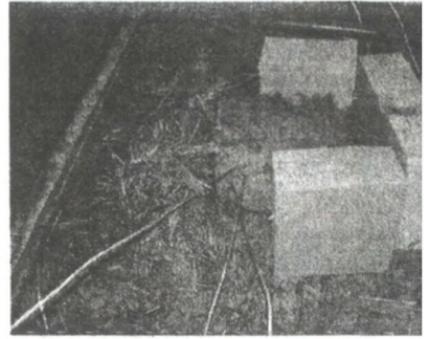
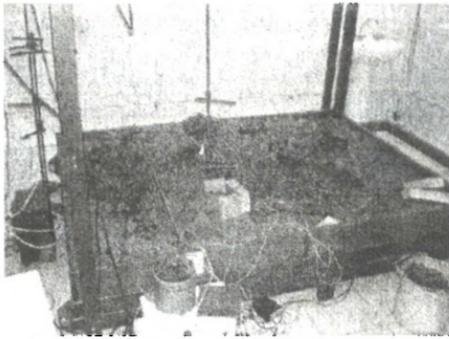


Рисунок 1 – Схема проведения эксперимента. 1 – металлический короб – полигон; 2 – образец торфа, $W=1\%$; 3 – лесной горючий материал (ЛГМ); 4 – источник зажигания; 5 – термопара в слое ЛГМ; 6 – термопара у поверхности торфа; 7 – термопара внутри слоя торфа; 8 – подложка из грунта.

Имеется комплекс измерительного оборудования; автоматизированная система сбора регистрации данных на базе компьютера, трех пятиканальных АЦП с ХА термопарами. Программа регистрации входных данных разработана на базе программного комплекса Labview. Влажесодержание торфа определяется при помощи анализатора влажности AWDHX – 50 с точностью до 0.01 %. Масса образцов определялась с помощью электронных весов AWDHL – 400 с точностью 0.1 г. Поджиг лесных горючих материалов (ЛГМ) осуществлялся с помощью линейного источника зажигания в виде спирали.

Подготовка к экспериментам проходила в следующей последовательности (см. рис. 1). На дно металлического короба 1 укладывается образец торфа 2 с размерами (0,08×0,065×0,05) м. В этом образце устанавливались термопары: одна в приповерхностном слое ближе к ЛГМ – 3, другая на оси внутри образца торфа 2 на расстоянии 1-10-2 м от первой. К образцу торфа

2 примыкал слой ЛГМ массой 10·10–3 кг. В этом слое на границе с образцом торфа 2 устанавливалась также термопара 5. Слой ЛГМ поджигался источником 4.



Наглядное фото эксперимента.

Анализ результатов экспериментальных исследований

Первые результаты экспериментальных исследований перехода горения ЛГМ от низового лесного пожара в торф приведены на рис. 2.

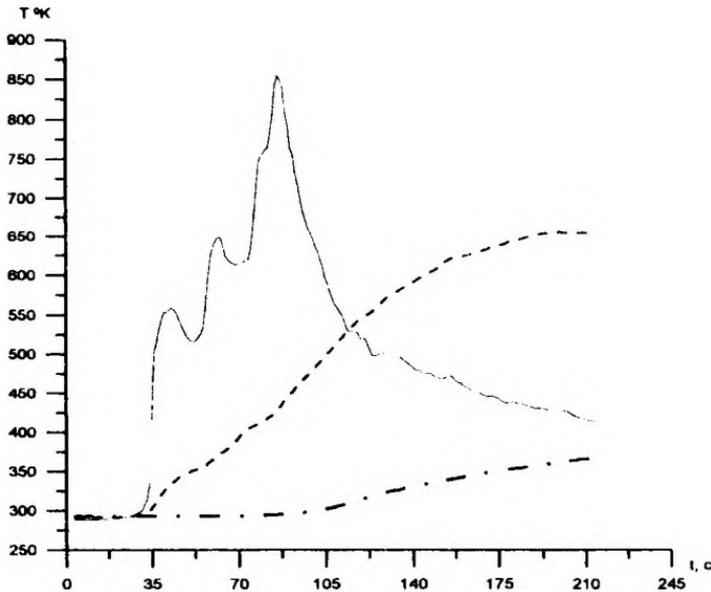


Рисунок 2 – Зависимости изменения температуры от времени: 1 – изменение температуры в ЛГМ; 2- изменение температуры в пристеночном слое торфа; 3 – изменение температуры в массе торфа.

Здесь представлена типичная зависимость изменения температуры от времени для серии опытов. Сплошная линия характеризует изменение температуры в слое ЛПМ. Пунктирная – в пристеночном слое торфа, штрих-пунктирная – изменение температуры в образце торфа на расстоянии 1·10–2 м от термопары, находящейся в пристеночном слое. В опытах влагосодержание в образцах торфа составляло $w = 1$ %. Размещения термопар в слое ЛПМ позволяло определить переход горения от ЛПМ к торфу и изменение температуры (сплошная линия) являлось реперной точкой, от которой начинался отсчет времени зажигания образца торфа. Видно, что нарастание температуры в пристеночном слое образца торфа идет с запаздыванием порядка 10 с. Скорость движения фронта пожара на расстоянии 1·10–2 м между термопарами составляет ориентировочно 0.19 мм/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. М. Математические модели лесных пожаров. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 277 с.
2. Борисов А. А., Борисов Ал. А., Горелик Р. С. и др. Экспериментальное исследование и математическое моделирование торфяных пожаров // Теплофизика лесных пожаров. Новосибирск, 1984. С. 5–22.
3. Патент на изобретение № 237/220. Испытательный комплекс для моделирования лесных, степных и торфяных пожаров / Гришин А. М., Зима В. П., Кузнецов В. Т., Фильков А. И. 3-ка № 2008/17660 от 04.05 2008, опубл. 27.10.2009. Бюл. № 30.
4. Гришин А. М., Голованов А. Н., Суков Я. В., Прежс Ю. И. Экспериментальное определение характеристик зажигания и горения торфа // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 78, № 1. С. 137–142.
5. Гришин А. М., Голованов А. Н., Суков Я. В. Экспериментальное определение теплофизических, термокинетических и фильтрационных характеристик торфа // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79, № 3. С. 131–135.
6. Гришин А. М. Общие математические модели лесных и торфяных пожаров и их приложения // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 4. С. 41–89.
7. Голованов А. Н., Якимов А. С., Абрамовских А. А., Суков Я. Р. Математическое моделирование теплофизических процессов при зажигании и тлении торфа // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 4. С. 699–709.

Тепломассообмен стенки и высокотемпературного газа при наличии вдува жидкости через пористые материалы

Краснов А.А., Голованов А.Н.
Томский государственный университет
E-mail: Koriolan@t-sk.ru

Известно, что наилучшими теплоизоляционными свойствами обладают пористые материалы. [1] Они широко используются в химической промышленности в термодиффузионных колонках, а в различных химических реакторах как заполнители - в дистилляционных колонках, в металлургической и криогенной промышленности в качестве различного вида теплоизоляций, в пищевой и медицинской промышленности в процессах сушки. Температурный диапазон их применения чрезвычайно широк. Это и парамагнитные соли, используемые при температурах, составляющих сотые доли градуса выше абсолютного нуля, и теплоизоляционные засыпки тугоплавких материалов, работающие при температурах до 3000-4000 градусов К.

Охлаждение жидкостью, испаряющейся внутри нагреваемой пористой стенки, является наиболее перспективным методом тепловой защиты. Однако обнаруженная в первых же экспериментах неустойчивость этой системы задерживает дальнейшее развитие исследований. Для выяснения причины неустойчивости процесса двухфазного пористого охлаждения разработана модель, упрощающая действительный процесс, но сохраняющая его качественные особенности. [2]

Конечная цель исследования - на основе данной модели разработать методику определения таких структурных и теплофизических характеристик, чтобы при известных определяющих параметрах процесса система не только являлась заведомо устойчивой, но ее устойчивость сохранялась и при некоторых заданных возмущениях этих параметров. Причем температура внешней поверхности не должна превышать предельной для безопасной эксплуатации пористого материала.

Однородная пористая пластина [3] толщиной δ подвергается воздействию внешнего теплового потока плотностью q (рис. 1).

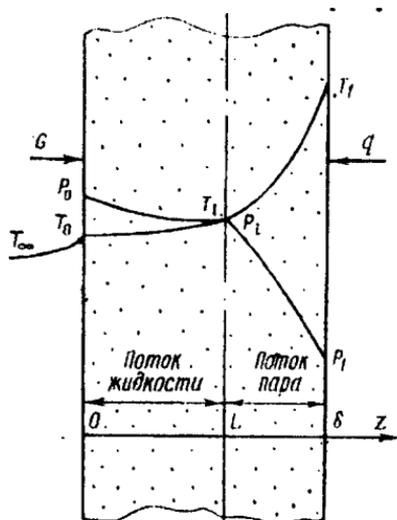


Рисунок 1 – Физическая модель процесса двухфазного пористого охлаждения.

Для охлаждения используется жидкость с начальной температурой T_{∞} . Охладитель продавливается сквозь стенку под действием перепада давления $P_0 - P_1$. По мере движения внутри пористой структуры жидкость поглощает тепло и ее температура возрастает. При этом сохраняется локальное равенство температур охладителя и материала стенки - тепловое равновесие.

Одновременно с ростом температуры падает давление в жидкости. Как только давление и температура жидкости достигают значений, соответствующих состоянию насыщения, происходит ее фазовое превращение. Испарение заключено в тонкой по сравнению с толщиной пластины области на расстоянии L от внутренней поверхности. Разность давлений на поверхности раздела фаз, обусловленная влиянием эффектов поверхностного натяжения, принимается малой по сравнению с перепадом давления на пластине. Образующийся пар поглощает тепло на участке от зоны испарения до внешней поверхности и в перегретом состоянии вытекает в окружающую среду. Физические свойства жидкости и пара постоянны и рассчитываются в состоянии насыщения при давлении, равном давлению окружающей среды.

На рис. 2 показана принципиальная схема исследуемой модели, выполненной в форме усеченного конуса – 1, в малом основании которого расположен пористый материал – 2. Пористый материал представляет собой спрессованные сферические частицы из нержавеющей стали и молибдена. Пористый материал был в форме цилиндра с высотой 1мм и диаметром основания 14 мм. Через внутренний объем модели навстречу набегающей плазменной струи подается вода. Пористость материала 0.27.

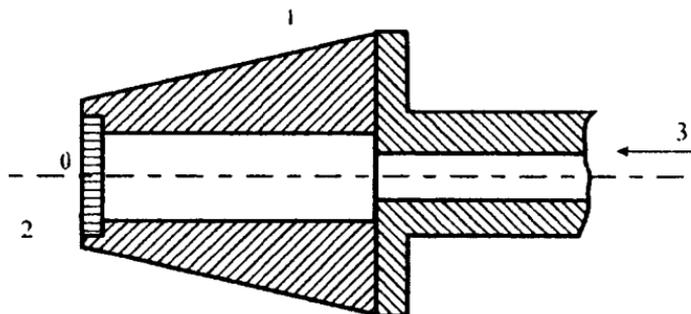


Рисунок 2 – Модель для сравнительных испытаний: 1 – модель в форме усеченного конуса; 2 – пористая вставка; 3 – вода, подаваемая под давлением через пронцаемый участок.

Параметры воздушной плазменной струи: $T_{\infty} = (3300 - 4900)K$, $G_{\infty} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}$, $T_s = (3100 - 3600)K$, $v_s = (32 - 57) \text{ м/с}$ - среднemasовая температура, расход плазмообразующего газа, локальные значения температуры и скорости плазмы в рабочем сечении струи (в месте установки модели), определялись из условия энергетического баланса работы плазмотрона, ротаметром, спектрографом ИСП-30, водоохлаждаемыми энтальпиметром и насадкой Пито.

В результате проведения эксперимента получены графические зависимости температуры поверхности пористого материала от времени, одна из которых представлена на рис. 3. Эксперименты проводились при различных расходах воды G .

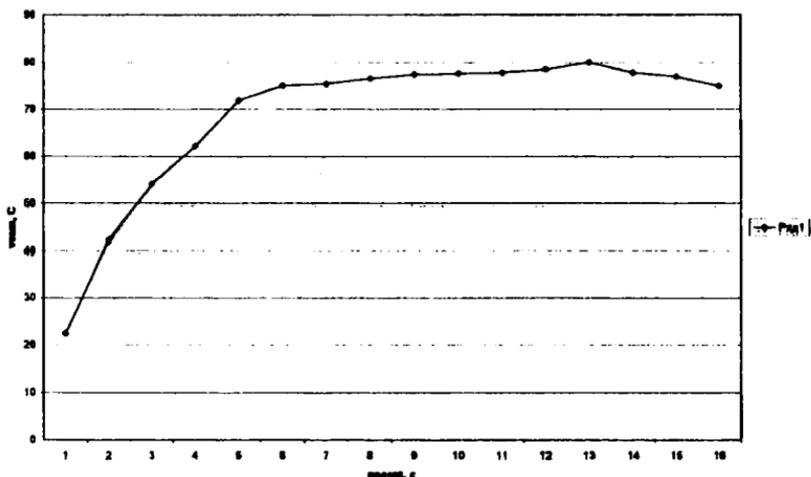


Рисунок 3 – Зависимость температуры поверхности пористого материала от времени, при $G=5.9$ г/с.

Подробное теоретическое исследование в [3] показывает, что условия устойчивости и безопасности практически исключают возможность создания устойчивой системы двухфазного охлаждения однородной пористой пластины при использовании воды в качестве охладителя, так как для этого в реальном диапазоне плотностей внешнего теплового потока пористый материал должен иметь настолько малую величину коэффициента теплопроводности, какой не имеет ни один из имеющихся в настоящее время материалов, обладающих подходящими структурными и прочностными характеристиками. Основной причиной этого является резкое уменьшение расхода охладителя при заглублении области испарения с внешней поверхности внутрь пластины.

Подобные результаты объясняют причину неустойчивости описанных в литературе экспериментальных установок и в то же время указывают выход из создавшегося положения: необходимо каким-то образом обеспечить условия для медленного уменьшения расхода охладителя при заглублении области испарения с внешней поверхности внутрь пористой пластины.

В заключении, можно сделать следующий вывод: в результате экспериментального исследования двухфазного пористого

охлаждения на устойчивость доказана непериодическая неустойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Л.Л., Танаева С.А. Теплофизические свойства пористых материалов. – Минск, 1971, 268 с.
2. Лыков А.В., Теория тепло- и массопереноса. – М.: Госэнергоиздат, 1963, 536 с.
3. Васильев Л.Л., Майоров В.А. Аналитическое исследование устойчивости равновесной системы двухфазного пористого охлаждения. – М.: Госэнергоиздат, 1963, 36 с.

Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке

Репало Е.Н.

Томский государственный университет

E-mail: lena-rep@list.ru

Математическая постановка задачи включает в себя четыре интегро-дифференциальных уравнения [1,2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \rho dr dx = \int_L \rho(V - \bar{\omega}, \bar{n}) dl - \iint_s \frac{1}{r} \rho v dx dr, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \rho u dr dx = \int_L [P \cdot n_x + \rho u(V - \bar{\omega}, \bar{n})] dl - \iint_s \frac{1}{r} \rho u v dx dr, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \rho v dr dx = \int_L [P \cdot n_r + \rho v(V - \bar{\omega}, \bar{n})] dl - \iint_s \frac{1}{r} \rho v^2 dx dr, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \rho e dr dx = \int_L [P(V, n) + \rho e(V - \bar{\omega}, \bar{n})] dl - \iint_s \frac{1}{r} (\rho e + P) v dx dr. \quad (4)$$

Эта система уравнений замыкается определением удельной полной энергии совершенного газа:

$$e = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (5)$$

Ниже приведены граничные условия в случае сильного дозвукового вдува с поверхности [3].

$$(\rho v_n)_w = const,$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_w}{\rho_w} + \frac{v_{n,w}^2}{2} \equiv H_{0,w} = const,$$

$$v_{n,1} - v_{n,w} + \frac{2}{(\gamma-1)} \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \left[1 - \left(\frac{p_w}{p_1} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{2\gamma}} \right] = 0.$$

На непроницаемых участках поверхности тела задавалось условие непротекания:

$$(\rho v_n)_w = 0. \quad (6)$$

Ниже приведена разностная схема метода С. К. Годунова, которая получена интегрированием исходной системы уравнений.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(\rho S)^{n+1} - (\rho S)^n}{\Delta t} &= \sum_{k=1}^4 [R(V - \bar{w}, \bar{n}) L]_k - \frac{1}{r_0} (\rho v S)^n, \\ \frac{(\rho u S)^{n+1} - (\rho u S)^n}{\Delta t} &= \sum_{k=1}^4 \{ [P n_x + R U (V - \bar{w}, \bar{n})] L \}_k - \frac{1}{r_0} (\rho u v S)^n, \\ \frac{(\rho v S)^{n+1} - (\rho v S)^n}{\Delta t} &= \sum_{k=1}^4 \{ [P n_r + R V (V - \bar{w}, \bar{n})] L \}_k - \frac{1}{r_0} (\rho v^2 S)^n, \\ \frac{(\rho e S)^{n+1} - (\rho e S)^n}{\Delta t} &= \sum_{k=1}^4 \{ [P(V, \bar{n}) + R E (V - \bar{w}, \bar{n})] L \}_k - \frac{1}{r_0} (\rho e + P)^n (v \cdot S)^n. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Система уравнений (7) позволяет явным образом определить значения газодинамических функций в серединах ячеек на новом временном слое через их значения на старом временном слое.

Продольные колебания моделировались следующим законом изменения координат поверхности тела [4]:

$$x^n = x^0 + A \sin(2\pi f t^n), \quad y^n = y^0,$$

где f – частота колебаний;

t – время;

A – амплитуда;

x^0, y^0 – координаты начального положения обтекаемого тела;

x^n, y^n – координаты поверхности тела на момент времени $t=t^n$.

На рисунке 1 кривой (1) показан контур обтекаемого тела, кривой (2) – положение головной ударной волны в отсутствии вдува и кривой (3) – положение головной ударной волны при наличии сильного дозвукового вдува с торцевой части поверхности тела. Здесь число Маха $M_\infty=2$. Результаты соответствуют стационарным режимам обтекания [5].

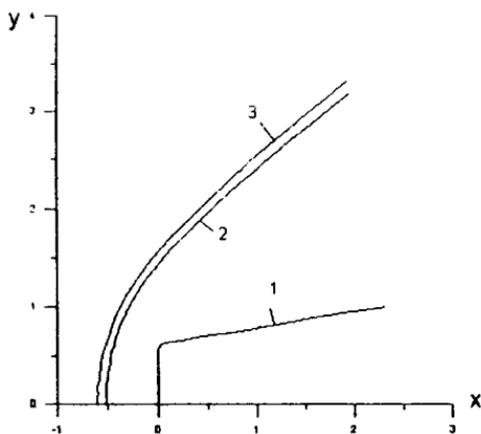


Рисунок 1 – Картина обтекания модели.

На рисунке 2 показаны зависимости от времени основных аэродинамических характеристик при продольных колебаниях непроницаемого тела с частотой 10 Гц и амплитудой 1 мм. Кривая (1) соответствует изменению коэффициента сопротивления, посчитанному при плотности воздуха в набегающем потоке, соответствующей температуре 340°C и давлению в 1 атм, без учета донного давления. Кривая (2) – безразмерному давлению в точке торможения. Кривые (3) и (4) – безразмерным координатам пересечения оси симметрии головной ударной волны и торцевым затуплением соответственно.

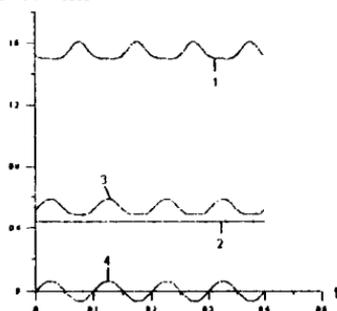


Рисунок 2 – Зависимости коэффициента сопротивления, давления в точке торможения, отхода ударной волны и поверхности тела на оси симметрии.

На рисунке 3 приведены те же характеристики что и на рисунке 2, но в случае вдува с поверхности и частоте продольных колебаний 9,46 Гц с той же амплитудой. Расход вдуваемого газа составлял

112кг/(м²·сек). Температура торможения составляла 300°К. Единственное что, добавилась кривая (5), соответствующая коэффициенту реактивного сопротивления.

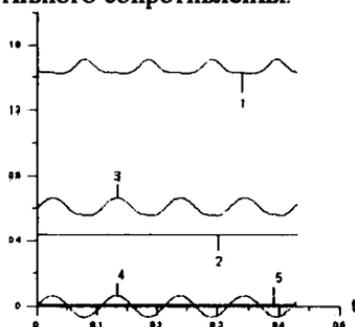


Рисунок 3 – Зависимости коэффициентов волнового и реактивного сопротивления, давления торможения, отхода ударной волны и поверхности тела от времени в случае вдува.

На рисунках 4, 5, 6 приведены те же характеристики что и на рисунке 2, но при частоте продольных колебаний 100 Гц, 200 Гц и 400 Гц соответственно.

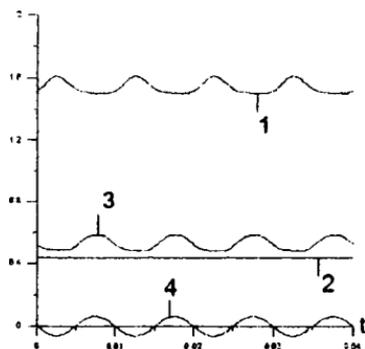


Рисунок 4 – Аэродинамические характеристики при частоте колебаний 100 Гц.

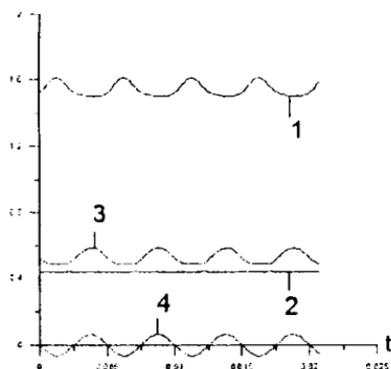


Рисунок 5 – Аэродинамические характеристики при частоте колебаний 200 Гц.

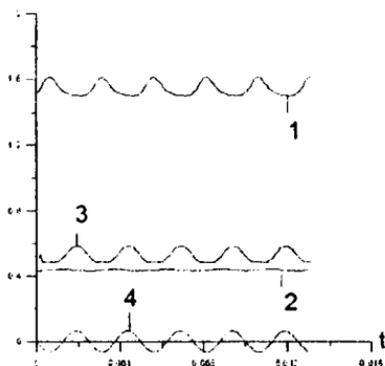


Рисунок 6 – Аэродинамические характеристики при частоте колебаний 400 Гц.

Анализ результатов показал, что малые низкочастотные и высокочастотные продольные колебания тела в сверхзвуковом потоке приводят к низкочастотным и соответственно высокочастотным колебаниям коэффициента сопротивления с частотой, совпадающей с частотой колебаний тела, и амплитудой не превышающей (в рассмотренных случаях) 7% от его величины в обычных условиях обтекания. Причем это справедливо как в случае непроницаемой поверхности, так и в случае сильного вдува с поверхности затупления. В обоих случаях отход головной ударной волны от поверхности тела на оси симметрии и давление торможения в критической точке остаются постоянными в процессе сверхзвукового обтекания колеблющегося тела. Постоянен и коэффициент реактивного сопротивления в случае вдува, который в

сумме с коэффициентом волнового сопротивления дает величину меньшую, чем в отсутствие вдува.

В заключении можно сказать, что малые низкочастотные и высокочастотные продольные колебания обтекаемого сверхзвуковым потоком тела не приводят к ожидаемому уменьшению силы его сопротивления, а, скорее наоборот, ухудшают его аэродинамические качества [6].

Сильный локализованный вдув с поверхности не оказывает влияние на характер взаимодействия колеблющегося тела со сверхзвуковым потоком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов [и др.]. – М. : Наука, 1976. – 400 с.
2. Пахомов Ф. М. Применение метода С. К. Годунова к расчету сверхзвукового обтекания затупленных тел / Ф. М. Пахомов. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2009. – 31 с.
3. Антонов В. А. Аэродинамика тел со вдувом / В. А. Антонов, В. Д. Гольдин, Ф. М. Пахомов. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1990. – 192 с.
4. Нестационарная аэродинамика баллистического полета / Ю. М. Липницкий [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 174 с.
5. Пахомов Ф. М. Аэродинамика колеблющегося конуса в набегающем сверхзвуковом потоке / Ф. М. Пахомов, Е. Н. Репало // Математическое и физическое моделирование опасных природных явлений и техногенных катастроф : материалы Всерос. конф. – Томск, 2010. – С. 93.
6. Сверхзвуковое осесимметричное обтекание затупленного конуса при его низкочастотных продольных колебаниях // Аэромеханика и газовая динамика. – Новосибирск / А. Н. Голованов, Ф. М. Пахомов, Е. Н. Репало, Е. В. Рулева. – В печати.

Математическое моделирование возникновения и распространения степных пожаров

Вильмс В.С., Лобода Е.Л.

Томский Государственный Университет

E-mail: wilmsw@sibmail.com

Пусть в бесконечном однородном степном массиве расположен бесконечно длинный очаг повышенной температуры. Ось z направлена вертикально вверх, начало координат совпадает с

местом расположения очага повышенной температуры, ось x направлена в горизонтальном направлении, направление скорости ветра будет параллельно оси x и может быть направлено как в положительную, так и в отрицательную сторону. Будем считать, что органическая масса представляет собой многофазную реакционно-способную пористую сплошную среду, которая состоит из следующих компонентов: сухого органического вещества с объемной долей φ_1 , связанной воды φ_2 , воды в жидко-капельном состоянии φ_3 , конденсированных продуктов пиролиза φ_4 , золы φ_5 , газовой и дисперсной фаз φ_6 . Согласно [1] будем считать, что CO, CH₄, H₂ и другие горючие компоненты летучих продуктов пиролиза можно моделировать одним эффективным горючим газом с реакционными свойствами CO, а CO₂ и другие инертные компоненты – эффективным продуктом реакций, получая таким образом газовую фазу, состоящую из трех компонент: O₂, эффективного горючего газа и эффективного продукта реакции.

Согласно [1], наличие сильного ветра позволяет считать, что $u \gg v_x$, а гидродинамика течения слабо зависит от процессов горения, что в свою очередь, позволяет использовать приближение постоянной равновесной скорости ветра в пологе степной растительности v_x , для вычисления которой можно использовать

соотношение:
$$v_x = \frac{ku_s}{\ln \frac{h}{z_0}}$$

Вертикальная составляющая скорости газа в окрестности фронта пожара определяется выражением

$$v_z = \sqrt{\frac{2gh(T_0 - T_s)}{T_s}}$$

С учетом сделанных допущений математически сформулированная задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \rho_s \varphi_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s \varphi_s v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s \varphi_s v_z}{\partial z} = Q \quad (1)$$

$$\rho_s \varphi_s c_{ps} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial T}{\partial x} \left(\rho_s \varphi_s \sum_{\alpha=1}^j D_{\alpha} \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\rho_s \varphi_s \sum_{\alpha=1}^j D_{\alpha} \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial z} \right) + \alpha_s (T_i - T) + c_{ps} (T_i - T) (1 - \alpha_s) R_{i,s} + q_s R_i$$

$$\varphi_s \rho_s \left(\frac{\partial c_{\alpha}}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial x} + v_z \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_s \varphi_s D_{\alpha} \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_s \varphi_s D_{\alpha} \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial z} \right) - c_{\alpha} Q + R_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \sum_{\alpha=1}^j c_{\alpha} = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^j \rho_i \varphi_i c_{pi} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) + q_{i,s} R_{i,s} - q_i R_i - q_s R_i + \alpha_s (T - T_i) + q_{i,s} R_{i,s} + k_i (cU_x - 4\sigma T_i^4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{3k_x} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) = k_i (cU_x - 4\sigma T_i^4) - \frac{Q_x}{h} \quad (5)$$

Здесь Q_x – плотность лучистого теплового потока, поступающего в слой СГМ от факела пламени. Для ее определения использовалась полуэмпирическая формула Альбини [2, 3]:

$$\rho_{i,s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -R_{i,s}, \quad \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -R_2, \quad (6)$$

$$\rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \alpha_s R_{i,s} - R_3 - \alpha_s R_{3,s}, \quad \rho_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = \alpha_s R_1 - \frac{M_1}{M_i} R_4, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\varphi_i = 1 - \sum_{i=1}^j \varphi_i, \quad P_i = \rho_i RT \sum_{\alpha=1}^j \frac{c_{\alpha}}{M_{\alpha}}, \quad (8)$$

$$Q = (1 - \alpha_s) R_{i,s} + R_3 + \frac{M_c}{M_1} R_1 + R_1^{(0)}, \quad (9)$$

$$R_1 = k_1 \rho_1 \varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT_1}\right), R_2 = k_2 \rho_2 \varphi_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT_1}\right), \quad (10)$$

$$R_3 = k_3 \rho_3 \varphi_3 \exp\left(-\frac{E_3}{RT_1}\right), R_4 = k_4 \rho_4 \varphi_4 c_1 \exp\left(-\frac{E_4}{RT_1}\right), \quad (11)$$

$$R_6 = k_6 M_2 T^{-2.25} \exp\left(-\frac{E_6}{RT}\right) \begin{cases} x_1^{0.25} x_2, & x_1 \geq 0,05 \\ x_1 x_2, & x_1 < 0,05 \end{cases}, x_i = \frac{c_i}{\sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha M_\alpha}{M_\alpha}}. \quad (12)$$

Здесь ρ_i – плотности i -ой фазы; c_α – массовые концентрации компонентов газовой фазы ($\alpha=1$ – кислорода, $\alpha=2$ – горючих компонентов продукта пиролиза, $\alpha=3$ – продуктов окисления горючих компонентов пиролиза, инертных компонентов газовой фазы, водяного пара и не реагирующих продуктов пиролиза); q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 – теплоты пиролиза, испарения связанной воды, испарения свободной воды и горения коксика; T – температура газовой фазы, T_s – температура конденсированной фазы; R_α – массовая скорость образования α -компонента; c_{p6} – удельная теплоемкость газовой фазы; D_α – коэффициенты диффузии α -компонента; $\lambda_{эф}$ – эффективный коэффициент теплопроводности газовой фазы; λ_s – эффективный коэффициент теплопроводности конденсированной фазы; α_v – коэффициент объемного теплообмена; α_c – коксовое число СГМ; v_x, v_z – компоненты вектора скорости движения газовой фазы; c – скорость света; k_s – спектральный коэффициент поглощения; σ – постоянная Стефана-Больцмана; Q – массовая скорость образования газовой фазы; U_R – осредненная по частотам плотность потока излучения; k_E – коэффициент ослабления; P – давление; k_i – предэкспоненциальные множители; E_i – энергии активации соответствующих химических реакций, M_α, M – молекулярные веса α -компонента и смеси в целом, s – удельная поверхность элемента СГМ.

Система уравнений (1)-(12) решалась с начальными и граничными условиями аналогичными [2].

На рисунке 1а приведены горизонтальные профили температур, полученные при движении фронта степного пожара, в момент

времени 3,8 с при различных геометрических характеристиках факела пламени.

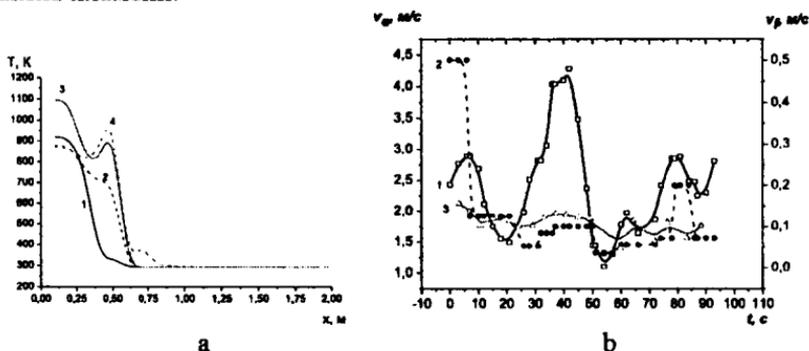


Рисунок 1 – а - Горизонтальные профили температур при движении фронта степного пожара: 1 – T при: $l=0,5$ м, $\gamma_1=20^\circ$, фронт пожара находится в $x=0,3$ м, $t=3,8$ с; 2 – T , при: $l=0,5$ м, $\gamma_1=20^\circ$, фронт пожара находится в $x=0,3$ м, $t=3,8$ с; 3 – T при: $l=1$ м, $\gamma_1=45^\circ$, фронт пожара находится в $x=0,5$ м, $t=3,8$ с; 4 – T , при: $l=1$ м, $\gamma_1=45^\circ$, фронт пожара находится в $x=0,5$ м, $t=3,8$ с.

б - Экспериментальные и теоретические зависимости скорости распространения фронта степного пожара при экспериментальных значениях скорости ветра, изменяющейся со временем (кривая 1). 2 – экспериментальная кривая изменения скорости распространения фронта степного пожара [5], 3 – расчетная скорость распространения степного пожара.

Полученные значения температур хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований [4, 5], согласно которым температура на передней кромке фронта горения изменяется в диапазоне 730-850 К и достигает максимума в глубине фронта около 1100 К. Для проверки математической модели использовались входные данные о скорости ветра и геометрических характеристиках факела пламени, полученные экспериментально в натуральных условиях и приведенные в [5].

На рисунке 1б приведены графики скорости ветра (кривая 1), скорости распространения степного пожара, полученной экспериментально [5] (кривая 2) и расчетная скорость распространения степного пожара (кривая 3), полученная при использовании модели (1)-(12). В качестве места расположения передней кромки степного пожара бралась, согласно [3], изотерма 750 К.

Из полученных результатов очевидна неплохая корреляция изменения расчетной скорости распространения степного пожара и изменения входных значений скорости ветра. Значительное расхождение расчетной и экспериментальной скорости фронта на

начальном отрезке времени обусловлено, как говорилось в [5], тем, что в начале экспериментальной полосы создавалась линейная зона зажигания высокой интенсивности, что приводило к неестественной скорости распространения фронта горения. Дальнейшее расхождение экспериментальной и расчетной скоростей распространения фронта горения обусловлено тем, что слой СГМ в эксперименте имел естественную неоднородность и кратковременные порывы ветра не регистрировались. Расхождение между расчетными и экспериментальными значениями скорости распространения фронта горения составляет в значительном временном диапазоне 10-20 %, а на некоторых участках расхождение достигало 50 %, что обусловлено упомянутыми выше факторами. Такие расхождения с экспериментальными данными являются вполне удовлетворительными, т.к. расчетная скорость распространения степного пожара в среднем несколько превышает экспериментальную, что позволяет получать опережающий прогноз местоположения фронта степного пожара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск: Наука, 1992. – 408 с.
2. Бурасов Д.М., Гришин А.М. Математическое моделирование низовых лесных и степных пожаров. Кемерово: Изд-во «Практика», 2006. – 133 с.
3. Albini F.A. Physical model for fire spread in brush // 2 Int. Symposium on Combustion. Pittsburg, 1967. P. 553-560.
4. Гришин А.М., Фильков А.И., Лобода Е.Л., Кузнецов В.Т., Рейно В.В., Руди Ю.А. Физическое моделирование степных пожаров в природных условиях // Пожарная безопасность, 2010. № 2. С. 100-105.
5. Гришин А.М., Фильков А.И., Лобода Е.Л., Рейно В.В., Руди Ю.А., Кузнецов В.Т., Караваев В.В. Экспериментальные исследования степных пожаров в природных условиях // Инновационная энергетика 2010: Материалы второй научно-практической конференции с международным участием. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. С. 22-24.

Digital Library (repository)
of Tomsk State University
<http://hdl.handle.net/11021/10000>

2-008067

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00821188